Prova tipo A

P2 de Álgebra Linear I – 2003.2

13 de outubro de 2003

Gabarito

1) Considere os vetores

$$v_1 = (2,1,0), \qquad v_2 = (3,0,-1), \qquad v_3 = (1,-1,-1),$$
$$v_4 = (0,3,2), \qquad v_5 = (8,4,0), \qquad v_6 = (7,2,a).$$

1.a) Determine o valor de **a** no vetor v_6 para que os vetores v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 gerem exatamente um plano (e não $\mathbb{R}^3$).

1.b) Considere a base

$$\beta = \{(1,0,1), (1,1,1), (1,1,0)\}$$

de $\mathbb{R}^3$. Considere o vetor v cujas coordenadas na base canônica são $(4,2,4)$. Determine as coordenadas de v na base β.

1.c) Encontre uma base $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que o vetor $v = (1,2,3)$ tenha coordenadas $(1,1,0)$ na base α.

1.d) Considere o plano $\pi \colon x - y - z = 0$ e a base $\gamma = \{(1,1,0), (0,1,-1)\}$ de π. Dado o vetor $v = (2,1,1)$ do plano π, encontre as coordenadas de v na base γ.

Respostas:

a) $a = -1$.

b) $(v)_\beta = (2,2,0)$.

c) $\alpha = \{(1,0,0), (0,2,3), (0,0,1)\}$.

d) $(v)_\gamma = (2, -1)$.

2)

a) Seja w um vetor de $\mathbb{R}^3$ e $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$M(u) = u \times w.$$

Sabendo que a matriz de M é

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine o vetor w.

b) Considere agora o vetor $u = (1, -1, -1)$ e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

definida por

$$T(v) = v \times u.$$

Determine a matriz $[T]$ de T.

Respostas:

a) $w = (1, 0, 1)$.

b) $[T] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3)

(a) Determine a matriz $[P_{\pi,\mathbf{i}}]$ da projeção $P_{\pi,\mathbf{i}}$ no plano $\pi\colon x - y - z = 0$ na direção do vetor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$.

(b) Considere a matriz

$$[P_{\rho,w}] = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Sabendo que esta matriz representa uma projeção em um plano ρ (contendo a origem) na direção de um vetor w, determine ρ e w.

(c) Sabendo que a matriz

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

representa uma projeção em uma reta, determine **a**, **b**, e **c**.

Respostas:

a) $[P_{\pi,\mathbf{i}}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\rho\colon x + y + z = 0, \qquad w = (1, 1, 0)$.

c) $a = 1, \qquad b = -1, \qquad c = -1$.

4)

a) Escreva a matriz $[R]$ da rotação $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ângulo 60 graus no sentido anti-horário.

b) Considere os pontos $A = (1, 0)$ e $B = (2, 3)$ de $\mathbb{R}^2$. Determine um ponto C tal que A, B e C sejam os vértices de um triângulo equilátero.

Respostas:

a) $[R] = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$

b) $C = (3/2 - 3\sqrt{3}/2, 3/2 + \sqrt{3}/2)$

5) Determine a equação cartesiana do plano π do espelhamento E em um plano,

$$E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

que verifica $E(1,2,2) = (-2,1,-2)$.

Resposta:

$\pi\colon 3x + y + 4z = 0.$