P2 de Álgebra Linear I – 2012.2

20 de outubro de 2012.

1. Considere a transformação liinear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(\vec{v}) = (-2,1,1) \times \big(\vec{v} \times (1,0,2)\big)\,.$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

Resposta: Calculamos as imagens dos vetores da base canônica:

$$\begin{aligned}
T(\vec{i}) &= (-2,1,1) \times \big((1,0,0) \times (1,0,2)\big) = (-2,1,1) \times (0,-2,0) = (2,0,4)\\
T(\vec{j}) &= (-2,1,1) \times \big((0,1,0) \times (1,0,2)\big) = (-2,1,1) \times (2,0,-1) = (-1,0,-2)\\
T(\vec{k}) &= (-2,1,1) \times \big((0,0,1) \times (1,0,2)\big) = (-2,1,1) \times (0,1,0) = (-1,0,2)
\end{aligned}$$

Portanto

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Determine a equação cartesiana da imagem de T,

$$\text{imagem}(T) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

Resposta: A imagem de T é gerada pelas imagens dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, isto é, pelos vetores $T(\vec{i}) = (2,0,4)$ e $T(\vec{j}) = T(\vec{k}) = (-1,0,-2)$. Estes vetores são paralelos, e assim a imagem é a reta

$$\text{imagem}(T) = \{(t,0,2t); t \in \mathbb{R}\}.$$

Em equações cartesianas:

$$y = 0, \quad z = 2x\,.$$

(c) Encontre dois vetores diferentes $\vec{u}$ e $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$T(\vec{u}) = T(\vec{w}) = (-2,0,-4).$$

Resposta: Obviamente, existem infinitas escolhas; aqui vai uma delas: Usando o que foi calculado em um item anterior, já sabemos que $T(-1,0,0) = (-2,0,-4)$. Vamos então escolher $\vec{u} = (-1,0,0)$. Se $\vec{v}$ é qualquer vetor não-nulo tal que $T(\vec{v}) = \vec{0}$, então definindo $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ teremos $T(\vec{w}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = (-2,0,4) + \vec{0} = (-2,0,4)$, como desejado. Uma escolha óbvia é $\vec{v} = (1,0,2)$, o que dá $\vec{w} = (0,0,2)$.

(d) Considere o plano $\pi\colon x + y + z = 0$. Determine uma base da imagem $T(\pi)$ de π pela transformação T.

Resposta: Uma base do plano é formada (por exemplo) pelos vetores $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$. Calculamos as imagens desses vetores:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo a imagem do plano π é uma reta; uma base para esta imagem é $\{(1, 0, 2)\}$.

---

2. Considere as retas de equações paramétricas

$$\begin{aligned} r &\colon (a + t, 1 + t, 2t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ s &\colon (t, -t, 1), \qquad\quad (t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Determine, se possível, o valor de a para que a distância entre as retas r e s seja 1.

Resposta: As retas r e s não são paralelas pois os respectivos vetores diretores $(1, 1, 2)$ e $(1, -1, 0)$ não são múltiplos um do outro. Portanto calcularemos distância entre retas reversas: O ponto $P = (a, 1, 0)$ pertence à reta r, e o ponto $Q = (0, 0, 1)$ pertence à reta s. Temos $\overrightarrow{PQ} = (-a, -1, 1)$ e que o produto vetorial dos vetores diretores das retas $(1, 1, 2)$ e $(1, -1, 0)$ é

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 2, -2)\,.$$

Ainda,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Assim a distância entre as retas é

$$\frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|(-a, -1, 1) \cdot (2, 2, -2)|}{2\sqrt{3}} = \frac{|-a-2|}{\sqrt{3}}$$

Igualando a distância a 1, temos $|a + 2| = \sqrt{3}$, ou seja, $a + 2 = \pm\sqrt{3}$ e

$$\boxed{a = -2 \pm \sqrt{3}}.$$

---

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Sabendo que $\lambda_1 = 2$ é um autovalor de A, determine os outros autovalores λ_2, λ_3 de A.

> **Resposta:** Sabemos que
>
> $$\begin{aligned} \text{traço de } A = 6 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \text{determinante de } A = 4 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 2\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$
>
> Assim, temos o sistema (não-linear)
>
> $$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 &= 4, \\ \lambda_2\lambda_3 &= 2. \end{aligned}$$
>
> As soluções deste sistema são as raízes da equação do segundo grau $\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$ (observe que $\lambda_2 = 2/\lambda_3$ e substitua na primeira equação). Assim por Báscara, encontramos
>
> $$\lambda_2 = 2 + \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{2}.$$
>
> (Evidentemente, a resposta na ordem trocada também é válida.)
>
> OBS: outra maneira de chegar na equação de segundo grau é calcular o polinômio característico da matriz e dividi-lo (Briot–Ruffini) por $\lambda - 2$.

(b) Determine, se possível, uma base β (de $\mathbb{R}^3$) formada por autovetores da matriz A.

> **Resposta:** Para cada autovalor λ_i encontrado acima, podemos encontrar um autovetor $\vec{v}$, i.e., uma solução $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ de
>
> $$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i;$$
>
> cada autovetor é encontrado como solução de um sistema linear homogêneo. Como os três autovalores são diferentes, os três autovetores escolhidos serão automaticamente LI e portanto formarão uma base de $\mathbb{R}^3$. Uma resposta é
>
> $$\beta = \{(1, 0, -1), (1, -\sqrt{2}, 1), (1, \sqrt{2}, 1)\}.$$

(c) Encontre as coordenadas do vetor $\vec{u} = (10, 2, 5)$ na base β.

> **Resposta:** Sejam a, b, c as coordenadas procuradas. Na base escolhida acima, temos
>
> $$(10, 2, 5) = a(1, 0, -1) + b(1, -\sqrt{2}, 1) + c(1, \sqrt{2}, 1).$$
>
> Isto conduz a um sistema linear cuja solução é
>
> $$a = \frac{5}{2}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{15}{4}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{15}{4}.$$

4. Sejam as matrizes

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Encontre a matriz inversa da matriz B.

Resposta: Vamos usar o método de Gauss. A matriz ampliada é

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A operação $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$ dá:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A operação $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 + L_3$ dá:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

As operações $L_1 \leftarrow L_1/3$ e $L_3 \leftarrow -L3$ dão:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Logo a inversa de B é:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Encontre uma matriz A tal que $AB = C$.

Resposta: Multiplicando à direita por B^{-1}, obtemos $A = ABB^{-1} = CB^{-1}$. Logo, usando o item anterior, temos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & -5/3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ -1/3 & 4 & 26/3 \end{pmatrix}.$$