P2 de Álgebra Linear I – 2012.1
Gabarito

---

1)

(a) Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,1,0); (1,0,1); (0,1,1)\}$$

Determine as coordenadas $(\bar{v})_\beta$ do vetor $\bar{v} = (4,2,0)$ na base β.

(b) Seja $\alpha = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a nova base de $\mathbb{R}^3$

$$\delta = \{\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{u}_2 + \bar{u}_3, \bar{u}_3 + \bar{u}_1\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor $\bar{w}$ na base α são

$$(\bar{w})_\alpha = (3,3,4),$$

determine as coordenadas $(\bar{w})_\delta$ de $\bar{w}$ na base δ.

(c) Determine k para que os vetores

$$\{(1,2,1); (2,k,1); (k,3,k)\}$$

não formem uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resposta:

(a) Escrevemos

$$\bar{v} = (4,2,0) = x\,(1,1,0) + y\,(1,0,1) + z\,(0,1,1),$$

e, em coordenadas, obtemos

$$4 = x + y, \quad 2 = x + z, \quad 0 = y + z.$$

Portanto $z = -y$,

$$4 = x + y, \quad 2 = x - y, \quad 6 = 2\,x, \quad x = 3.$$

Logo

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = -1.$$

Portanto,

$$(v)_\beta = (3, 1, -1).$$

(b) Sejam $(\bar{w})_\delta = (x, y, z)$ as coordenadas de $\bar{w}$ na base δ. Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{w} \quad &= x\,(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) + y\,(\bar{u}_2 + \bar{u}_3) + z\,(\bar{u}_3 + \bar{u}_1) = \\ &= (x + z)\,\bar{u}_1 + (x + y)\,\bar{u}_2 + (y + z)\,\bar{u}_3. \end{aligned}$$

Por hipótese as coordenas de $\bar{w}$ na base α são $(3, 3, 4)$, assim temos que

$$\bar{w} = 3\,\bar{u}_1 + 3\,\bar{u}_2 + 4\,\bar{u}_3.$$

Como as coordenadas de um vetor em uma base (no caso na base α) são únicas temos que

$$3 = x + z, \quad 3 = x + y, \quad 4 = y + z.$$

Portanto,

$$z - y = 0, \quad z = y, \quad z = y = 2, \quad x = 1.$$

Logo

$$(\bar{w})_\delta = (1, 2, 2).$$

(c) Para que os vetores não formem uma base não devem ser linearmente independentes. Ou seja,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k^2 - 3) - 2\,(2\,k - 3) + k\,(2 - k) = -2\,k + 3 = 0.$$

Portanto,

$$k = 3/2.$$

2) Considere a aplicação linear $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$S(\bar{u}) = \bar{u} \times (1,1,1).$$

(a) Determine a matriz de S na base canônica.

(b) Determine TODOS os vetores $\bar{u}$ tais que $S(\bar{u}) = \bar{u}$.

(c) Determine dois vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$ não nulos tais que $S(\bar{u}) = S(\bar{v}) \neq \bar{0}$.

(d) Estude se S é sobrejetora (isto é, a imagem de S é $\mathbb{R}^3$). Determine uma base ortonormal da imagem de S.

(e) Determine uma base ortonormal da imagem do plano

$$\pi\colon x + y - 2\,z = 0$$

pela transformação linear S.

Resposta: Observamos que

$$S(x,y,z) = (x,y,z) \times (1,1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-z, z-x, x-y).$$

(a) Devemos determinar $S(\mathbf{i})$, $S(\mathbf{j})$ e $S(\mathbf{k})$. Pela fórmula acima temos

$$S(\mathbf{i}) = (0,-1,1), \quad S(\mathbf{j}) = (1,0,-1), \quad S(\mathbf{k}) = (-1,1,0).$$

Portanto, a matriz de S na base canônica é

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Observe que $S(\bar{u}) = \bar{u} \times (1,1,1)$ é ortogonal a $\bar{u}$. Logo $S(\bar{u}) = \bar{u}$ se, e somente se, $\bar{u} = \bar{0}$. V. também pode usar as equações e que se $\bar{u} = (x,y,z)$ verifica $S(\bar{u}) = \bar{u}$ então

$$x = y - z, \quad y = z - x, \quad z = x - y.$$

E este sistema possui solução única igual a $(0,0,0)$.

(c) Observe primeiro que $S(1,1,1)=\bar{0}$. Logo dado qualquer vetor (x,y,z) temos que

$$S(x,y,z)=S(x,y,z)+\bar{0}=S(x,y,z)+S(1,1,1)=S\big((x,y,z)+(1,1,1)\big).$$

Escolhemos primeiro qualquer vetor $\bar{u}$ tal que $S(\bar{u})\neq\bar{0}$. Por exemplo, o vetor $\bar{u}=(1,0,1)$ que verifica $S(\bar{u})=(-1,0,1)$. Agora é suficiente escolher

$$\bar{v}=(1,0,1)+(1,1,1)=(2,1,2)$$

que, pela observação acima, verifica

$$S(\bar{v})=S(\bar{u})=(-1,0,1)\neq\bar{0}.$$

(d) Lembre que a transformação linear S é sobrejetora se, e somente se, para todo vetor $\bar{v}\in\mathbb{R}^3$ existe $\bar{u}$ tal que $S(\bar{u})=\bar{v}$. Claramente, pela definição de produto vetorial, o vetor $(1,1,1)$ não é imagem de nenhum vetor $\bar{u}$ pois $S(\bar{u})$ é por definição ortogonal a $(1,1,1)$.

Sabemos que a imagem de S está gerada pelos vetores

$$S(\mathbf{i})=(0,-1,1),\quad S(\mathbf{j})=(1,0,-1)\quad \text{e}\quad S(\mathbf{k})=(-1,1,0).$$

Estes vetores pertencem ao plano vetorial de vetor normal $(1,1,1)$, o plano $x+y+z=0$. Como estes vetores não são paralelos eles geram dito plano. Portanto, a imagem de S é

$$\text{imagem } S=\{\bar{w}=(x,y,z)\colon x+y+z=0.\}.$$

Agora é suficiente escolher uma base ortonormal de dito plano. Primeiro escolhemos uma base ortogonal, por exemplo,

$$\{(1,0,-1),(1,0,-1)\times(1,1,1)=(1,-2,1)\}$$

e normalizamos

$$\left\{\big(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2}\big),\big(1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6}\big)\right\}.$$

(e) A imagem do plano $\pi\colon x + y - 2\,z = 0$ está gerada pelas imagens dos vetores de uma base de π. Escolhemos uma base de π, por exemplo,

$$\{(1,1,1),(2,0,1)\}.$$

Pela fórmula acima

$$S(1,1,1) = (0,0,0), \quad S(2,0,1) = (-1,-1,2).$$

Portanto a imagem do plano π é uma reta vetorial (que passa pela origem) paralela ao vetor $(1,1,-2)$. Portanto, uma base ortonormal da imagem de π é

$$\left\{ \left(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}\right) \right\}.$$

---

3)

(a) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ a & c & d \end{pmatrix}.$$

Sabendo que o espaço imagem de T é o plano de equação cartesiana

$$x - y + z = 0$$

e que $T(2,-1,0) = \bar{0}$, determine os valores de a, b, c e d.

(b) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a inversa da matriz A.

Resposta (desenvolvimento):

a) Sabemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ a & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-b \\ 4-4 \\ 2\,a-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos $b = 2$. Logo a matriz é da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ a & c & d \end{pmatrix}$$

. Por outro lado, a imagem da transformação é o plano $x - y + z = 0$. Portanto $S(\mathbf{i}) = (1, 2, a)$, $S(\mathbf{j}) = (2, 4, c)$ e $S(\mathbf{k}) = (0, 1, d)$ pertencem a dito plano, isto é

- $1 - 2 + a = 0$, $a = 1$,
- $2 - 4 + c = 0$, $c = 2$,
- $0 - 1 + d = 0$, $d = 1$.

Portanto

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad c = 2, \qquad d = 1.$$

b) Para calcular a matriz inversa utilizaremos o método de Gauss (operações com linhas) para o cálculo da matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Início:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Operações: (Iinha I)/2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operações: (Iinha III) $-$ (linha I)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operações: troca das Iinhas I e III

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operações: (Iinha II)$-$(linha I) e (linha III)$-$(linha I)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operações: (Iinha II)/2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operações: troca das linhas II e III

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1/4 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Operações: (linha II) $-$ (linha III)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 3/4 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1 \\ 3/4 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

prova A:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

prova B:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

prova C:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

prova D:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$