P2 de Álgebra Linear I – 2011.2
Gabarito

---

1) Considere o subespaço vetorial $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ de equação cartesiana

$$\mathbb{W}\colon x + 2\,y - 3\,z = 0$$

e o conjunto de vetores $\mathcal{V}$ de $\mathbb{W}$,

$$\mathcal{V} = \{(4,1,2), (0,3,2), (3,0,1), (1,1,1), (2,-1,0), (1,4,3)\}.$$

(a) Determine uma base β de $\mathbb{W}$ tal que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ na base β sejam $(\overrightarrow{u})_\beta = (1,1)$.

(b) Determine uma base γ de $\mathbb{W}$ formada por vetores do conjunto $\mathcal{V}$ tal que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ na base γ sejam $(\overrightarrow{u})_\gamma = (0,1)$.

(c) Determine uma base ortonormal $\eta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\overrightarrow{v}_1$ seja paralelo a $(1,1,1)$ e $\xi = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ seja uma base de $\mathbb{W}$.

(d) Considere o vetor $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ e a base

$$\alpha = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ na base α.

Nota: as coordenadas dos vetores estão escritas na base canônica, exceto nos caso em que outra base está explicitada.

Resposta:

(a) Escolhemos como primeiro vetor da base β qualquer vetor de $\mathbb{W}$ não paralelo ao vetor $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$. Por exemplo, o vetor $(3,0,1)$. Temos que determinar o segundo vetor da base β, (a,b,c). Por hipótese, $(\overrightarrow{u})_\beta = (1,1)$ e portanto

$$(1,1,1) = 1\,(3,0,1) + 1\,(a,b,c).$$

Logo
$$(a,b,c) = (1,1,1) - (3,0,1) = (-2,1,0).$$
Portanto,
$$\beta = \{(3,0,1), (-2,1,0)\}.$$
Observamos que existem outras (infinitas) possibilidades.

(b) Seja $\gamma = \{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\}$. Temos $(\overrightarrow{u})_\gamma = \big((1,1,1)\big)_\gamma = (0,1)$, logo
$$(1,1,1) = 0\,\overrightarrow{w}_1 + 1\,\overrightarrow{w}_2 = \overrightarrow{w}_2.$$
Portanto, o papel de $\overrightarrow{w}_1$ é irrelevante, e podemos escolher qualquer vetor de $\mathcal{V}$ diferente de $(1,1,1)$. Temos portanto as seguintes possibilidades
$$\gamma = \{(4,1,2),(1,1,1)\}, \quad \gamma = \{(0,3,2),(1,1,1)\}, \quad \gamma = \{(3,0,1),(1,1,1)\},$$
$$\gamma = \{(2,-1,0),(1,1,1)\}, \quad \gamma = \{(1,4,3),(1,1,1)\}.$$
Finalmente, note que a base $\{w_1, w_2\}$ é diferente da base $\{w_2, w_1\}$.

(c) Escolheremos primeiro uma base ortogonal, e posteriormente normalizaremos esta base. Denominaremos a esta base $\rho = \{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_3\}$, onde $\overrightarrow{w}_i$ é paralelo a $\overrightarrow{v}_i$. Temos
$$\overrightarrow{w}_1 = (1,1,1).$$
O vetor $\overrightarrow{w}_2$ está no plano $\mathbb{W}$ e é ortogonal a $\overrightarrow{w}_1$. Portanto, $\overrightarrow{w}_2$ é ortogonal aos vetores $(1,1,1)$ e $(1,2,-3)$, portanto é paralelo a $(1,1,1)\times(1,2,-3)$. Escolhemos
$$\overrightarrow{w}_2 = (1,1,1)\times(1,2,-3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-5,4,1).$$
Finalmente, $\overrightarrow{w}_3$ pode ser escolhido como o vetor normal do plano $\mathbb{W}$, $\overrightarrow{w}_3 = (1,2,-3)$.

Temos
$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{w}_1|| &= \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}, \\
||\overrightarrow{w}_2|| &= \sqrt{(-5)^2+4^2+1^2} = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}, \\
||\overrightarrow{w}_3|| &= \sqrt{1^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}.
\end{aligned}$$

Normalizando os vetores da base ρ obtemos a base η,

$$\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{w}_1/\sqrt{3}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{w}_2/\sqrt{42}, \quad \overrightarrow{v}_3 = \overrightarrow{w}_3/\sqrt{14}.$$

e portanto

$$\eta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{42}}\,(-5,4,1), \frac{1}{\sqrt{14}}\,(1,2,-3). \right\}$$

Observamos que existem outras respostas corretas, dadas por variações nos sinais dos vetores da base.

(d) Da definição de coordenadas, temos que se $(\overrightarrow{u})_\alpha = (x,y,z)$ então

$$(1,1,1) = x\,(1,1,0) + y\,(0,1,1) + z\,(1,0,1).$$

Obtemos o sistema linear

$$1 = x + z, \quad 1 = x + y, \quad 1 = y + z.$$

Escalonando (segunda equação menos primeira)

$$1 = x + z, \quad 0 = y - z, \quad 1 = y + z.$$

Logo $y = z$. Substituindo na última equação temos $2\,y = 1$. Logo $z = 1/2$ e $x = 1 - 1/2 = 1/2$. Portanto,

$$(\overrightarrow{u})_\alpha = (1/2, 1/2, 1/2).$$

---

2) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{u}_1 = (1,1,2), \quad \overrightarrow{u}_2 = (2,0,1)$$

e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}_1)\,\overrightarrow{u}_1 + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}_2)\,\overrightarrow{u}_2.$$

(a) Determine a matriz de T na base canônica.

(b) Determine o conjunto de vetores $\overrightarrow{v}$ tais que $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$.

(c) Considere o plano

$$\mathbb{V}\colon x + y + 2\,z = 0.$$

Determine uma base do subespaço $T(\mathbb{V})$, isto é a imagem do plano $\mathbb{V}$ pela transformação linear T. Observe que

$$T(\mathbb{V}) = \{T(\overrightarrow{v}) \text{ tais que } \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}\}$$

Nota: as coordenadas dos vetores estão escritas na base canônica.

Resposta:

(a) Determinaremos $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{i})$ e $T(\mathbf{k})$, que serão as colunas da matriz de T na base canônica.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{i}) &= \big((1,0,0)\cdot(1,1,2)\big)\,(1,1,2) + \big((1,0,0)\cdot(2,0,1)\big)\,(2,0,1) \\ &= (1,1,2) + 2\,(2,0,1) = (5,1,4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{j}) &= \big((0,1,0)\cdot(1,1,2)\big)\,(1,1,2) + \big((0,1,0)\cdot(2,0,1)\big)\,(2,0,1) \\ &= (1,1,2) + 0\,(2,0,1) = (1,1,2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{k}) &= \big((0,0,1)\cdot(1,1,2)\big)\,(1,1,2) + \big((0,0,1)\cdot(2,0,1)\big)\,(2,0,1) \\ &= 2\,(1,1,2) + (2,0,1) = (4,2,5). \end{aligned}$$

Portanto

$$[T] = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Devemos resolver

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Isto é

$$
\begin{aligned}
5\,x + y + 4\,z &= x,\\
x + y + 2\,z &= y,\\
4\,x + 2\,y + 5\,z &= z.
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
\begin{aligned}
4\,x + y + 4\,z &= 0,\\
x + 0\,y + 2\,z &= 0,\\
4\,x + 2\,y + 4\,z &= 0.
\end{aligned}
$$

Trocando a ordem,

$$
\begin{aligned}
x + 0\,y + 2\,z &= 0\\
4\,x + 2\,y + 4\,z &= 0\\
4\,x + y + 4\,z &= 0.
\end{aligned}
$$

Das duas últimas equações obtemos $y = 0$. Logo e portanto

$$x + 2\,z = 0, \quad x + z = 0.$$

Restando (primeira equação menos segunda) obtemos $z = 0$ e portanto $x = 0$.

Portanto o único vetor que verifica $T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ é o vetor nulo.

(c) Escolhemos uma base γ de $\mathbb{V}$, por exemplo

$$\gamma = \{(1, -1, 0), (2, 0, -1)\}.$$

O espaço $T(\mathbb{V})$ é gerado pelos vetores $T(1, -1, 0)$ e $T(2, 0, -1)$,

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Como estes vetores são paralelos (ambos são paralelos a $(2, 0, 1)$) temos que uma base de $T(\mathbb{V})$ é

$$\xi = \{(2, 0, 1)\}.$$

3) Considere o plano (subespaço vetorial) $\mathbb{V}: x + y + z = 0$ e uma transformação linear $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica as seguintes propriedades

(A) $L(1,1,1) = (1,1,1)$,

(B) $L(1,-1,0) = (1,-1,0)$,

(C) A imagem de $\mathbb{V}$ pela transformação linear L, o subespaço $L(\mathbb{V})$, é uma reta. Lembre que

$$L(\mathbb{V}) = \{L(\overrightarrow{v}) \text{ tais que } \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}\}.$$

(a) Determine uma base do subespaço vetorial $L(\mathbb{V})$.

(b) Determine uma base da imagem de L.

(c) Determine a matriz (na base canônica) de uma transformação linear L que verifique as propriedades (A), (B) e (C).

Nota: as coordenadas dos vetores estão escritas na base canônica.

Resposta:

(a) Como $L(\mathbb{V})$ é uma reta é $L(1,-1,0) = (1,-1,0) \in L(\mathbb{V})$ temos que uma base de $L(\mathbb{V})$ é

$$\alpha = \{(1,-1,0)\}.$$

(b) Considere uma base

$$\beta = \{(1,1,1),(1,-1,0),(a,b,c)\},$$

onde (a,b,c) é um vetor de $\mathbb{V}$ (isto é possível pois $(1,1,1)$ é perpendicular a $\mathbb{V}$).

A imagem de L é gerada por $L(1,1,1) = (1,1,1)$, $L(1,-1,0) = (1,-1,0)$ e $L(a,b,c) = \lambda\,(1,-1,0)$. Portanto, estes vetores são l.d., e é suficiente considerar a base formada pelos dois primeiros (que são l.i.),

$$\gamma = \{(1,1,1),(1,-1,0)\}.$$

(c) Para este item escolhemos

$$(a, b, c) = (1, 1, 1) \times (1, -1, 0) = (1, 1, -2)$$

e escolhemos $L(1, 1, -2) = (0, 0, 0)$. Observe que podemos escolher como $L(1, 1, -2)$ qualquer vetor paralelo a $(1, -1, 0)$.

Determinaremos $T(\mathbf{i})$. Escrevemos

$$(1, 0, 0) = x\,(1, 1, 1) + y\,(1, -1, 0) + z\,(1, 1, -2).$$

Como a base é ortogonal, temos

$$(1, 0, 0)\cdot(1, 1, 1) = x\,(1, 1, 1)\cdot(1, 1, 1) + y\,(1, -1, 0)\cdot(1, 1, 1) + z\,(1, 1, -2)\cdot(1, 1, 1),$$

logo

$$1 = 3\,x, \quad x = 1/3.$$

Analogamente,

$$(1, 0, 0)\cdot(1, -1, 1) = x\,(1, 1, 1)\cdot(1, -1, 0) + y\,(1, -1, 0)\cdot(1, -1, 0) + z\,(1, 1, -2)\cdot(1, -1, 0),$$

logo

$$1 = 2\,y, \quad y = 1/2.$$

Finalmente,

$$(1, 0, 0)\cdot(1, 1, -2) = x\,(1, 1, 1)\cdot(1, 1, -2) + y\,(1, -1, 0)\cdot(1, 1, -2) + z\,(1, 1, -2)\cdot(1, 1, -2),$$

logo

$$1 = 6\,z, \quad z = 1/6.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L(1, 0, 0) =& 1/3\,L(1, 1, 1) + 1/2\,L(1, -1, 0) + 1/6\,L(1, 1, -2) = \\ & 1/3\,(1, 1, 1) + 1/2\,(1, -1, 0) = (5/6, -1/6, 2/6) \end{aligned}$$

Sabemos que

$$L(\mathbf{i}) - L(\mathbf{j}) = L(1, -1, 0) = (1, -1, 0), \quad L(\mathbf{j}) = L(\mathbf{i}) - (1, -1, 0).$$

Logo

$$L(\mathbf{j}) = L(\mathbf{i}) - (1, -1, 0) = (5/6, -1/6, 2/6) - (1, -1, 0) = (-1/6, 5/6, 2/6).$$

Finalmente
$$L(\mathbf{i})+L(\mathbf{j})+L(\mathbf{k})=L(1,1,1)=(1,1,1).$$
Logo
$$\begin{aligned}L(\mathbf{k})&=(1,1,1)-L(\mathbf{i})-L(\mathbf{j})=\\&=(1,1,1)-(5/6,-1/6,2/6)-(-1/6,5/6,2/6)=\\&=(2/6,2/6,2/6).\end{aligned}$$
Portanto
$$[L]=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-1&2\\-1&5&2\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

---

4)[1] Determine a inversa da matriz A a seguir
$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\1&-3&1\end{pmatrix}.$$

Resposta:

a) Utilizaremos o método de Gauss para o cálculo da matriz inversa.

Início:
$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&2\\1&-3&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

Operações: (II linha) $-$(I linha) e (III linha)$-$ (I linha)
$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-2&1\\0&-5&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

[1]Enunciado da prova A. No fim da resposta se encontra a solução das provas B, C e D

Operações: troca de linhas II e III

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operações: (II linhas)/(-5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & -1/5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operações: (III linha) + 2 (II linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & -1/5 \\ -3/5 & 1 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

Operações: (I linha) − (III linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8/5 & -1 & 2/5 \\ 1/5 & 0 & -1/5 \\ -3/5 & 1 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

Operações: (I linha) − 2 (II linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6/5 & -1 & 4/5 \\ 1/5 & 0 & -1/5 \\ -3/5 & 1 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 6/5 & -1 & 4/5 \\ 1/5 & 0 & -1/5 \\ -3/5 & 1 & -2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & -2/ \end{pmatrix}.$$

prova A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

prova B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

prova C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

prova D:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$