P2 de Álgebra Linear I – 2010.1

15 de maio de 2010.

Gabarito

Questão 1)

Considere a matriz,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 8 & 7 & c \end{bmatrix},$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

a) Determine todos os valores de c para os quais a matriz A *não* é inversível.

b) Ache a inversa de A quando $c = 8$.

Atenção: 1 erro na matriz inversa, perde 0.5 pto.; 2 erros perde 1 pto.; 3 ou mais erros zera o item.

Respostas:

(a) A *não* é inversível se, e somente se, $\det(A) = 0$.
Calculando o determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 8 & 7 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-c & 0 & 0 \\ c & c & c \\ 8 & 7 & c \end{vmatrix} = (2-c)\begin{vmatrix} c & c \\ 7 & c \end{vmatrix} = (2-c)c(c-7).$$

Logo, a resposta é para $c = 0$, $c = 2$ e $c = 7$.

(b) Escalonando, obtem-se:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1/6 & -25/24 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questão 2)

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (1,1)$, $T(0,1,0) = (0,3)$ e $T(1,1,1) = (2,8)$.

a) Ache a matriz de T.

b) T é injetora? Explique.

c) Determine $T(\mathbb{V})$, a imagem de $\mathbb{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ sob a transformação T.

Respostas:

(a) Precisamos achar $T(0,0,1)$. Mas $(0,0,1) = (1,1,1) - (1,0,0) - (0,1,0)$, e sendo T linear, vem que:

$$T(0,0,1) = T(1,1,1) - T(1,0,0) - T(0,1,0) = (2,8) - (1,1) - (0,3) = (1,4).$$

Assim,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Temos que $T(x,y,z) = (x+z, x+3y+4z)$. Como $T(-1,-1,1) = (0,0,0) = T(0,0,0)$, segue que T não é injetora.

(c) O subespaço $\mathbb{V}$ é um plano pela origem, com vetores diretores $(1,0,-1)$ e $(0,1,-1)$. Ora, $T(\mathbb{V})$ é gerado por $T(1,0,-1) = (1,4)$ e $T(0,1,-1) = (1,-3)$, que são dois vetores L.I. Logo, formam uma base em $\mathbb{R}^2$, e portanto $T(\mathbb{V}) = \mathbb{R}^2$.

Questão 3)

Decida se as afirmações a seguir são Verdadeiras ou Falsas (**Atenção**: no caso Verdadeiro, prove a afirmação e no caso Falso, exiba um contra-exemplo concreto).

a) Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é sobrejetora.

b) Se o conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ é linearmente independente, então o mesmo vale para $\{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3},\ \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}\}$.

c) Não existe subespaço vetorial bidimensional de $\mathbb{R}^3$ que não contém nenhum dos vetores $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, e $\overrightarrow{\mathbf{k}}$.

Respostas:

(a) FALSA: basta considerar a T.L. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ que tem $T(\mathbb{R}^3) = \{(0, 0, 0)\}$, logo não é sobrejetora.

(b) FALSA: Tome $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{v_3} = (0, 0, 1)$, e obtemos $\{(0.1. -1), (1, 0, -1), (1, -1, 0)\}$ que é conjunto L.D. pois

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(c)FALSA: O subespaço $\mathbb{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$ é bidimensional (é um plano) e nenhum dos $\overrightarrow{\mathbf{i}}$, $\overrightarrow{\mathbf{j}}$, $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ pertence a $\mathbb{V}$ (não satisfazem a eq. do plano).