P2 de Álgebra Linear I – 2009.2

22 de outubro de 2009.

Gabarito

---

1) Decida se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) "Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores não-nulos quaisquer de $\mathbb{R}^3$, então o conjunto $\{\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}-\overrightarrow{u}\}$ é linearmente dependente."

b) "A função $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T(\overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{u}\|\,\overrightarrow{u}$ é uma transformação linear."

Aviso: Sem a devida justificativa os itens terão nota zero, mesmo se a resposta dada esteja certa.

Resposta:

a) Temos:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot[(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w})\times(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u})] &= (\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}-\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u})\\
&= \overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})-\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{u})-\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})-\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u})\\
&= \overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})-\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u})\\
&= \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

Pelo teste do produto misto, os vetores de $\{\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}-\overrightarrow{u}\}$ são coplanares, portanto o conjunto é linearmente dependente. A afirmação é **verdadeira**.

b) Afirmação **falsa**: basta notar que $T(\lambda\overrightarrow{u}) = \|\lambda\overrightarrow{u}\|(\lambda\overrightarrow{u}) = |\lambda|\,\lambda\,\|\overrightarrow{u}\|\,\overrightarrow{u} \neq \lambda T(\overrightarrow{u})$, em geral (i.e, para todo $\lambda\neq 0$ ou ± 1).

---

2) Considere o conjunto $\mathcal{B} = \{(1,2,5),(1,-1,-1),(2,3,a)\}$, onde a é um número real a determinar.

a) Ache **todos** os valores de a para os quais o vetor $(2,2,6)$ pode ser escrito de maneira *única* como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$.

b) Se $a=0$, ache $(2,2,6)_{\mathcal{B}}$, ou seja, as coordenadas de $(2,2,6)$ na base $\mathcal{B}$.

c) Se $a=8$, determine *explicitamente* (ou seja, se for o caso, através de uma equação) o subespaço $\mathbb{V}$ gerado por $\mathcal{B}$.

Resposta:

a) Queremos saber quais os valores de a tais que a equação:

$$\begin{aligned}(2,2,6) &= x(1,2,5)+y(1,-1,-1)+z(2,3,a)\\ &= (x+y+2z, 2x-y-3z, 5x-y+az)\end{aligned}$$

tem uma única solução. Ou seja, qdo. o sistema:

$$\begin{cases} x+y+2z=2\\ 2x-y+3z=2\\ 5x-y+az=6,\end{cases}$$

tem uma única solução. Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y+2z=2\\ 2x-y+3z=2\\ 5x-y+az=6,\end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x+y+2z=2\\ 3y+z=2\\ 6y+(10-a)z=4,\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=2\\ 3y+z=2\\ (8-a)z=0.\end{cases}$$

Assim, a solução é única para todo $a\neq 8$ (alternativamente, o mesmo resultado se obtém ao exigir q/ o determinante da matriz dos coeficientes seja $\neq 0$).

b) Basta notar do sistema escalonado acima que se $a \neq 8$, a única solução do sistema é $(4/3, 2/3, 0)$, independentemente de a, logo em particular para $a = 0$. Então:

$$(2, 2, 6) = (4/3)(1, 2, 5) + (2/3)(1, -1, -1) + 0.(2, 3, a),$$

donde $(2, 2, 6)_{\mathcal{B}} = (4/3, 2/3, 0)$.

c) Se $a = 8$, sabemos que $\mathcal{B}$ é linearmente dependente, logo $\mathbb{V} \neq \mathbb{R}^3$. Por outro lado os dois primeiros vetores de $\mathcal{B}$ não são paralelos. Segue que $\mathbb{V}$ é um plano pela origem com vetores geradores $\{(1, 2, 5), (1, -1, -1)\}$, ou seja

$$\mathbb{V} = \{X(t, s) = t(1, 2, 5) + s(1, -1, -1), \ \ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Alternativamente, como $(1, 2, 5) \times (1, -1, -1) = (3, 6, -3)$,

$$\mathbb{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}.$$

---

3) Ache o ponto P do plano de equação $\pi : 5x - 14y + 2z = -9$ que está o mais próximo possível do ponto $Q = (-2, 15, -7)$. Ache a distância d entre π e Q.

Resposta:

Temos que $P = \pi \cap r$, onde r é a reta perpendicular a π e passando por Q. Ou seja,

$$r : X(t) = Q + \overrightarrow{n}t = (-2, 15, -7) + t(5, -14, 2) = (-2 + 5t, 15 - 14t, -7 + 2t),$$

para $t \in \mathbb{R}$. Achamos o valor de t tal que $X(t) \in \pi$:

$$\begin{aligned} 5(-2 + 5t) - 14(15 - 14t) + 2(-7 + 2t) = 9 \\ \Rightarrow -10 + 25t - 210 + 196t - 14 + 4t = 9 \Rightarrow 225t = 225 \Rightarrow t = 1. \end{aligned}$$

Logo $P = X(1) = (3, 1, -5)$.

Finalmente: $d = \|PQ\| = \|(5, -14, 2)\| = \sqrt{25 + 196 + 4} = \sqrt{225} = 15.$

4) Ache a matriz da transformação linear que é a projeção ortogonal sobre a reta de equações

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Resposta:

Somando as eqs. obtemos $x = 0$, e daí que $y = z$. Logo, a reta tem eq. vetorial $X(t) = t(0,1,1)t = t\overrightarrow{u}$. A projeção ortogonal de um $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$ na direção de $\overrightarrow{u}$ é

$$P(\overrightarrow{v}) = (\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|^2})\overrightarrow{u}.$$

Para achar a matriz de P na base canônica basta calcular $P(\hat{\mathbf{i}})$, $P(\hat{\mathbf{j}})$ e $P(\hat{\mathbf{k}})$.

Temos $\|\overrightarrow{u}\|^2 = 2$, e então:

$$P(\hat{\mathbf{i}}) = (1/2).0\overrightarrow{u} = (0,0,0),$$

$$P(\hat{\mathbf{j}}) = (1/2).1\overrightarrow{u} = (0,1/2,1/2),$$

e

$$P(\hat{\mathbf{k}}) = (1/2).1\overrightarrow{u} = (0,1/2,1/2).$$

Finalmente, a matriz de P é:

$$[P] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$