P2 de Álgebra Linear I – 2009.1

8 de Maio de 2009

Gabarito

---

1) Considere a reta de equações paramétricas

$$r\colon (1+2t,\, t\,, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}$$

e os planos de equações cartesianas

$$\pi\colon 3x + y - 5z = 4, \qquad \varrho\colon 3x + y - 5z = 2.$$

(a) Ache o ponto P da reta que está mais próximo do ponto $Q = (-1, 0, 0)$ e determine a distância entre eles.

(b) Determine a distância entre o ponto Q e a reta r.

(c) Ache a distância entre os planos π e ϱ.

Resposta:

(a) Este ponto é obtido como a interseção do plano π que contém o ponto $Q = (-1, 0, 0)$ e é perpendicular à reta r. Portanto, o vetor normal $\overrightarrow{n}$ do plano é o vetor diretor da reta r,

$$\overrightarrow{n} = (2, 1, -1).$$

Logo, a equação do plano π é

$$\pi\colon 2x + y - z = d.$$

Como $(-1,0,0)$ pertence ao plano, $d=-2$. Portanto,

$$\pi\colon 2x+y-z=-2.$$

O ponto P é a interseção do plano π e a reta r. Para calcular esta interseção determinamos o parâmetro t em que a *reta encontra o plano*:

$$2\,(1+2\,t)+t-1+t=-2, \quad 6\,t=-3, \quad t=-1/2.$$

Ou seja, o ponto de interseção é

$$P=(0,-1/2,3/2).$$

O vetor $\overline{PQ}=(2/2,-1/2,3/2)$ tem como módulo

$$\frac{\sqrt{14}}{2},$$

que é a distância procurada.

Outro método de resolver a questão é o seguinte. Considere um ponto qualquer A da reta (por exemplo, $(1,0,1)$) e o vetor diretor unitário da reta ($v=1/\sqrt{6}(2,1,-1)$). Se $Q=(x,y,z)$ é o ponto da reta mais próximo de P temos o seguinte:

$$\overline{AP}=(\overline{AP}\cdot v)v+\overline{QP}, \quad (-2,0,-1)=-1/2(2,1,-1)+\overline{QP}.$$

Logo,

$$P=(x,y,z)=(-1,0,0)+(-1/6)(6,3,-3)+(2,0,1)=(0,-1/2,3/2).$$

Agora a questão termina como acima

(b) A distância entre a reta r e o ponto Q é a distância entre o ponto P obtido no item anterior e o ponto Q. Portanto, a distância é

$$\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

(c) Primeiro observe que se trata de planos paralelos (os vetores normais são iguais). Observe que, caso não fossem paralelos, a distância seria necessariamente zero.

Para calcular esta distância observaremos que esta distância é igual a distañcia de qualquer ponto P de de $\pi\colon 3x + y - 5z = 4$ (por exemplo $P = (1, 1, 0)$) a $\varrho\colon 3x + y - 5z = 2$. Considere o ponto $Q = (0, 2, 0)$ do segundo plano.

Considere o vetor normal unitário dos planos

$$n = \frac{1}{\sqrt{35}}\Big(3, 1, -5\Big).$$

Então a distância d é

$$d = |\overline{PQ} \cdot n| = |1/\sqrt{35}(-1, 1, 0) \cdot (3, 1, -5)| = 2/\sqrt{35}.$$

---

2) Responda as questões a seguir.

(a) Determine a para que o vetor $\overrightarrow{v} = (1, a, -a)$ seja combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u_1} = (2, 1, 1)$ e $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, 1)$.

(b) Considere uma base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$$

e os vetores

$$\overrightarrow{w}_1 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3, \quad \overrightarrow{w}_2 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_3, \quad \overrightarrow{w}_3 = \overrightarrow{v}_2 + \overrightarrow{v}_3.$$

Determine se

$$\alpha = \{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \overrightarrow{w}_3\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Considere a base η de $\mathbb{R}^3$

$$\eta = \{(1, 1, 0); (1, 0, 1); (0, 1, 1)\}$$

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{v})_\eta$ do vetor $\overrightarrow{v} = (4, 2, 0)$ na base η.

(d) Considere o vetor $\overrightarrow{w}$ cujas coordenadas na base η são $(w)_\eta = (4, 2, 0)$. Determine as coordenadas de $\overrightarrow{w}$ na base canônica.

(e) Considere o subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores

$$\overrightarrow{v}_1 = (1,2,1), \quad \overrightarrow{v}_2 = (1,-1,2)$$

e sua base

$$\alpha = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}.$$

Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u} = (2,1,3)$ de $\mathbb{W}$ na base γ.

Resposta:

(a) Para que o vetor $\overrightarrow{v}$ seja combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u}_1$ e $\overrightarrow{u}_2$ estes três vetores devem ser coplanares, isto é, seu produto misto deve ser zero (observe que $\overrightarrow{u}_1$ e $\overrightarrow{u}_2$ não são paralelos). Portanto,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -a \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,a - 2\,a = -4\,a = 0.$$

Portanto, $a = 0$.

Outra forma de raciocinar é a seguinte. Devemos ter

$$(1, a, -a) = x\,(2,1,1) + y\,(0,1,1),$$

para certos números reais x e y. Obtemos o sistema linear de equações

$$1 = 2\,x, \quad a = x + y, \quad -a = x + y.$$

Este sistema deve ter solução, para isso devemos ter $a = -a$. Logo $a = 0$.

(b) Para que os vetores de β formem uma base devem ser linearmente independentes (três vetores l.i. de $\mathbb{R}^3$ formam uma base). Consideremos uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{w}_1$, $\overrightarrow{w}_2$ e $\overrightarrow{w}_3$ que seja o vetor nulo:

$$x\,\overrightarrow{w}_1 + y\,\overrightarrow{w}_2 + z\,\overrightarrow{w}_3 = \bar{0} = (x+y)\,\overrightarrow{v}_1 + (x+z)\,\overrightarrow{v}_2 + (x+y+z)\,\overrightarrow{v}_3 = \bar{0}.$$

Obtemos assim uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ e $\overrightarrow{v}_3$ que é o vetor zero. Como os vetores $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ e $\overrightarrow{v}_3$ são linearmente independentes temos

$$x + y = 0, \quad x + z = 0, \quad x + y + z = 0.$$

Logo, temos que resolver este sistema. Este sistema só admite a solução trivial $x = y = z = 0$. Escalonando, terceira equação menos a primeira, temos $z = 0$ Portanto, da segunda equação $x = 0$ e da primeira $y = 0$.

Logo, os vetores $\overrightarrow{w}_1$, $\overrightarrow{w}_2$ e $\overrightarrow{w}_3$ são linearmente independentes.

(c) Devemos escrever o vetor $\overrightarrow{v}$ como combinação linear dos vetores da base η,

$$(4, 2, 0) = x\,(1, 1, 0) + y\,(1, 0, 1) + z\,(0, 1, 1).$$

Em coordenadas,

$$4 = x + y, \quad 2 = x + z, \quad 0 = y + z.$$

Portanto $z = -y$,

$$4 = x + y, \quad 2 = x - y, \quad 6 = 2\,x, \quad x = 3.$$

Logo,

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = -1.$$

Portanto,

$$(v)_\eta = (3, 1, -1).$$

(d) Da definição de coordenadas na base η

$$\overrightarrow{w} = 4\,(1, 1, 0) + 2\,(1, 0, 1) + 0\,(0, 1, 1),$$

onde os vetores $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$ estão escritos na base canônica. Logo,

$$\overrightarrow{w} = (6, 4, 2).$$

(e) Devemos escrever

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{u}_1 + y\,\overrightarrow{u}_2.$$

Nesse caso as coordenadas de $\overrightarrow{u}$ na base α são $(\overrightarrow{u})_\alpha = (x, y)$.

Portanto

$$(2, 1, 3) = x\,(1, 2, 1) + y\,(1, -1, 2).$$

Assim

$$2 = x + y, \quad 1 = 2\,x - y, \quad 3 = x + 2\,y.$$

Portanto, $3 = 3\,x$ e $x = 1$ e $y = 1$. Logo,

$$(\overrightarrow{u})_\alpha = (1, 1).$$

3) Considere os vetores

$$\overrightarrow{u}_1 = (1,1,1), \qquad \overrightarrow{u}_2 = (1,0,1), \qquad \overrightarrow{u}_3 = (0,1,0)$$

e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$T(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}_1)\,\overrightarrow{u}_1 + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}_2)\,\overrightarrow{u}_2 + (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}_3)\,\overrightarrow{u}_3.$$

(a) Determine $T(x,y,z)$ e a matriz de T.

(b) Determine, se possível, dois vetores diferentes $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ tais que

$$T(\overrightarrow{v}) = T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}_1.$$

(c) Determine uma base β da imagem de T (denotada $T(\mathbb{R}^3)$). Lembre que

$$T(\mathbb{R}^3) = \{\overrightarrow{e} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{e}\}.$$

Resposta:
(a) Calculamos $T(x,y,z)$,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \Big((x,y,z)\cdot(1,1,1)\Big)(1,1,1) + \Big((x,y,z)\cdot(1,0,1)\Big)(1,0,1) + \\ &+\Big((x,y,z)\cdot(0,1,0)\Big)(0,1,0) = \\ &= \Big(x+y+z\Big)(1,1,1) + \Big(x+z\Big)(1,0,1) + \Big(y\Big)(0,1,0) = \\ &= \Big(2\,x+y+2\,z, x+2\,y+z, 2\,x+y+2\,z\Big). \end{aligned}$$

Portanto,

$$T(x,y,z) = \Big(2\,x+y+2\,z, x+2\,y+z, 2\,x+y+2\,z\Big).$$

Para determinar a matriz de T devemos calcular $T(\mathbf{i}), T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$. Temos

- $T(1,0,0) = (2,1,2)$,
- $T(0,1,0) = (1,2,1)$,
- $T(0,0,1) = (2,1,2)$.

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Um vetor $\overrightarrow{e} = (x,y,z)$ verifica $T(\overrightarrow{e}) = (1,1,1)$ se, e somente se,

$$T(x,y,z) = \Big(2\,x + y + 2\,z, x + 2\,y + z, 2\,x + y + 2\,z\Big) = (1,1,1).$$

Obtemos o sistema linear de equações:

$$2\,x + y + 2\,z = 1 \quad x + 2\,y + z = 1, \quad 2\,x + y + 2\,z = 1.$$

A primeira e a última equações são iguais, assim (trocando a ordem)

$$x + 2\,y + z = 1, \quad 2\,x + y + 2\,z = 1.$$

Escalonando (segunda equação menos duas vezes a primeira) temos:

$$x + 2\,y + z = 1, \quad -3\,y = -1.$$

Logo

$$y = 1/3, \quad x + 2/3 + z = 1.$$

Escolhendo z como parâmetro e resolvendo:

$$x = 1/3 - t, \quad y = 1/3, \quad z = t.$$

Por exemplo, tomando $t = 0$ e $t = 1$ temos

$$\overrightarrow{v} = \big(1/3, 1/3, 0\big), \qquad \overrightarrow{w} = \big(-2/3, 1/3, 1\big).$$

De fato, é suficiente v. escolher dois valores diferentes de t. Por exemplo, fazendo $t = -1$ e $t = 1$ obtemos

$$\overrightarrow{v} = \big(4/3, 1/3, -1\big), \qquad \overrightarrow{w} = \big(-2/3, 1/3, 1\big).$$

(c) A imagem de T é gerada pelos vetores $T(\mathbf{i}), T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$. Portanto, é gerada por $(2,1,2)$ e $(1,2,1)$. Como estes vetores são linearmente independentes temos

$$\beta = \{(2,1,2),(1,2,1)\}.$$

Observe que a imagem de T é o plano vetorial de vetor norma $(2,1,2) \times (1,2,1) = (-3,0,3)$. Ou seja, de equações cartesianas

$$x - z = 0.$$

Portanto, podemos escolher qualquer base deste plano. Por exemplo,

$$\beta = \{(1,0,1),(0,1,0)\}.$$