P2 de Álgebra Linear I – 2006.1

Gabarito

---

1) Considere as transformações lineares

$$T,\ L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cujas matrizes na base canônica são

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [L] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

a) Determine a equação cartesiana da imagem de T.

b) Determine uma base da imagem de T.

c) Determine o conjunto de vetores v tais que $T(v) = \bar{0}$.

d) Determine um vetor não nulo w tal que $L(w) = T(w)$.

Resposta:
a) A imagem de T está gerada pelos vetores

$$T(\mathbf{i}) = (0,-2,2), \quad T(\mathbf{j}) = (1,4,-5), \quad T(\mathbf{k}) = (-1,-2,3).$$

Como os vetores $(0,-2,2)$ e $(1,4,-5)$ não são paralelos, eles geram o plano cujo vetor normal é

$$(0,-2,2) \times (1,4,-5) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (2,2,2).$$

Isto é, eles geram o plano

$$\pi\colon x+y+z=0.$$

Como o vetor $T(\mathbf{k})$ pertence ao plano π,

$$(-1)+(-2)+3=0,$$

obtemos que a equação cartesiana da imagem de T é

$$\text{imagem}(T)\colon x+y+z=0.$$

b) Uma base β da imagem de T é dada pelos vetores

$$\beta=\{T(\mathbf{i})=(0,-2,2);T(\mathbf{j})=(1,4,-5)\}.$$

De fato, v. pode escolher como base qualquer par de vetores linearmente independentes do plano π.

c) Devemos resolver a equação

$$T(v)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$y-z=0, \quad -2\,x+4\,y-2\,z=0, \quad 2\,x-5\,y+3\,z=0.$$

Obtemos (da primeira equação) $y=z$ e (substituindo $z=y$ na segunda equação) $x=y$. Logo os vetores são da forma (t,t,t). Veja que a terceira equação é satisfeita.

Portanto,

$$T(v)=0 \quad \text{se, e somente se,} \quad v=(t,t,t),\ t\in\mathbb{R}.$$

d) O vetor w deve verificar

$$L(w)=T(w), \quad (T-L)(w)=0.$$

Portanto, se $w = (x, y, z)$ devemos ter

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos as equações

$$x + y + z = 0, \quad y + z = 0.$$

Portanto $x = 0$ e $z = -y$. Logo w é qualquer vetor da forma

$$w = (0, t, -t), \quad t \neq 0.$$

---

2) Considere o conjunto de vetores

$$\mathcal{E} = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 0, 1), (0, 1, 0), (2, 1, 2)\}.$$

(a) Considere o subespaço vetorial $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores de $\mathcal{E}$. Determine uma base β de $\mathbb{W}$ formada por vetores de $\mathcal{E}$.

(b) Determine as coordenadas do vetor $(4, 2, 4)$ na base β.

(c) Determine uma base γ de $\mathbb{R}^3$ formada pelos vetores da base β do item (a) e um vetor do conjunto

$$\mathcal{F} = \{(3, 3, 3), (5, 0, 5), (8, 3, 8), (0, 1, 1)\}.$$

(d) Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a nova base de $\mathbb{R}^3$

$$\delta = \{u_1 + u_2, u_2 - u_3, u_3 - u_1\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor w na base α são

$$(w)_\alpha = (1, 1, 1),$$

determine as coordenadas $(w)_\delta$ de w na base δ.

Resposta:

a) Observe que os vetores $(1,1,1)$ e $(2,2,2)$ são paralelos. Assim eles geram a reta $\{(t,t,t),\ t \in \mathbb{R}\}$. Como o terceiro vetor de $\mathcal{E}$ não é paralelo a esta reta, temos que os vetores $(1,1,1),(2,2,2)$ e $(1,0,1)$ geram o plano cujo vetor normal é

$$(1,1,1) \times (1,0,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,-1).$$

Isto é, estes vetores geram o plano ρ de equação cartesiana

$$x - z = 0.$$

Observe que os restantes vetores de $\mathcal{E}$ pertencem a dito plano. Portanto, uma base de $\mathbb{W}$ formada por vetores de $\mathcal{E}$ é

$$\beta = \{(1,1,1);(1,0,1)\}.$$

De fato, é suficiente escolher dois vetores linearmente independentes do conjunto $\mathcal{E}$. Outras (não todas as possíveis) opç oes são:

$$\beta = \{(1,1,1);(0,1,0)\}; \quad \beta = \{(1,1,1);(2,1,2)\}; \quad \beta = \{(1,0,1);(0,1,0)\}.$$

b) Fixamos a base $\beta = \{(1,1,1);(1,0,1)\}$. As coordenadas de $(4,2,4)$ na base β, $(4,2,4)_\beta = (x,y)$, devem verificar

$$(4,2,4) = x\,(1,1,1) + y\,(1,0,1),$$

isto é

$$4 = x + y, \quad 2 = x, \quad x + y = 4.$$

Logo $x = 2, y = 2$. Portanto,

$$(4,2,4)_\beta = (2,2).$$

c) Escolhemos a base $\beta = \{(1,1,1);(1,0,1)\}$ e lembramos que $\mathbb{W}$ é o plano $x - z = 0$. Portanto, é suficiente escolher um vetor do conjunto $\mathcal{F}$ que não pertença ao plano. A única escolha possível é o vetor $(0,1,1)$. Portanto,

$$\gamma = \{(1,1,1);(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

Observe que, como os vetores não são coplanares, obtemos de forma imediata que γ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

d) Suponha que $(w)_\delta = (a, b, c)$. Então

$$\begin{aligned} w &= a\,(u_1 + u_2) + b\,(u_2 - u_3) + c\,(u_3 - u_1) = \\ &= (a - c)\,u_1 + (a + b)\,u_2 + (-b + c)\,u_3. \end{aligned}$$

Como as coordenadas de w na base α são $(w)_\alpha = (1, 1, 1)$, temos

$$w = u_1 + u_2 + u_3.$$

As igualdades acima implicam (lembre a unicidade das coordenadas em uma base)

$$1 = a - c, \quad 1 = a + b, \quad 1 = -b + c.$$

Somando a primeira e a terceira equação, obtemos

$$2 = a - b.$$

De

$$1 = a + b, \quad 2 = a - b$$

obtemos

$$a = 3/2, \quad b = -1/2.$$

Finalmente,

$$c = 1/2.$$

Portanto,

$$(w)_\delta = (3/2, -1/2, 1/2).$$

---

3) Considere as retas

$$r\colon (t, 2\,t, t),\ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s\colon (t + 1, 2\,t, t - 5),\ t \in \mathbb{R}$$

e o plano

$$\pi\colon x + y + z = 0.$$

(a) Determine a matriz (na base canônica) da transformação linear T *projeção no plano π na direção da reta r.*

(b) Determine a matriz (na base canônica) da transformação linear L *projeção na reta r na direção do plano π.*

(c) Determine a forma matricial (na base canônica) da transformação afim A *projeção na reta s na direção do plano π.*

Resposta:

a) Observe que $(1,2,1)$ é um vetor paralelo à direção de projeção, logo

$$T(1,2,1) = (0,0,0)$$

Temos que o vetor $(-1,2,-1)$ é um vetor do plano de projeção. Portanto,

$$T(-1,2,-1) = (-1,2,-1)$$

Somando as igualdades,

$$T(0,4,0) = T((-1,2,-1)+(1,2,1)) = (-1,2,-1).$$

Portanto

$$T(0,1,0) = (-1/4, 2/4, -1/4).$$

Temos também que que o vetor $(1,-1,0)$ é um vetor do plano de projeção. Portanto,

$$T(1,0,0) - T(0,1,0) = T(1,-1,0) = (1,-1,0).$$

Isto é

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= T(0,1,0) + (1,-1,0) = \\ &= (-1/4, 2/4, -1/4) + (1,-1,0) = \\ &= (3/4, -2/4, -1/4). \end{aligned}$$

Finalmente, o vetor $(0,-1,1)$ é um vetor do plano de projeção. Portanto,

$$T(0,0,1) - T(0,1,0) = T(0,-1,1) = (0,-1,1).$$

Isto é

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= T(0,1,0) + (0,-1,1) = \\ &= (-1/4, 2/4, -1/4) + (0,-1,1) = \\ &= (-1/4, -2/4, 3/4). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -2/4 & 2/4 & -2/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

V. pode resolver o problema usando geometria analítica. Temos que $T(a,b,c)$ é o vetor $\overline{OQ}$, onde Q é a interseção da reta $(a+t, b+2\,t, c+t)$ e o plano $x+y+z=0$. Esta interseção ocorre quando

$$a+t+b+2\,t+c+t=0, \quad 4\,t=-a-b-c, \quad t=-\frac{a+b+c}{4}.$$

Isto é

$$T(a,b,c) = \left(\frac{3\,a-b-c}{4}, \frac{-2\,a+2\,b-2\,c}{4}, \frac{-a-b+3\,c}{4}\right).$$

Tomando os vetores $(1,0,0),(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ obtemos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (3/4,-2/4,-1/4), \\ T(0,1,0) &= (-1/4,2/4,-1/4), \\ T(0,0,1) &= (-1/4,-2/4,3/4). \end{aligned}$$

b) Raciocinamos como no primeiro item. Observe que $(1,2,1)$ é um vetor da reta de projeção, logo

$$L(1,2,1) = (1,2,1)$$

Temos que o vetor $(-1,2,-1)$ é um vetor paralelo à direção de projeção. Portanto,

$$L(-1,2,-1) = (0,0,0)$$

Somando as igualdades,

$$L(0,4,0) = L((1,2,1)+(-1,2,-1)) = (1,2,1).$$

Portanto

$$L(0,1,0) = (1/4,2/4,1/4).$$

Temos também que que o vetor $(1,-1,0)$ é paralelo ao plano direção projeção. Portanto,

$$L(1,0,0) - L(0,1,0) = L(1,-1,0) = (0,0,0).$$

Isto é
$$L(1,0,0) = L(0,1,0) = (1/4, 2/4, 1/4).$$
Analogamente, o vetor $(0,-1,1)$ é paralelo à direção projeção. Portanto,
$$L(0,0,1) - L(0,1,0) = L(0,-1,1) = (0,0,0).$$
Isto é
$$L(0,0,1) = L(0,1,0) = (1/4, 2/4, 1/4).$$
Portanto,
$$[L] = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 2/4 & 2/4 & 2/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

V. pode usar também geometria analítica como no caso anterior. Outra possibilidade é observar que dado um vetor v se verifica
$$v = v_r + v_\pi,$$
onde v_r é um vetor paralelo à reta r e v_π é paralelo ao plano π. Portanto,
$$T(v) = v_\pi, \quad L(v) = v_r.$$
Ou seja,
$$v = T(v) + L(v) = Id(v).$$
Isto significa que a soma das matrizes $[T]$ e $[L]$ é a matriz identidade, isto é,
$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -2/4 & 2/4 & -2/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 2/4 & 2/4 & 2/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

c) Para determinar a forma matricial devemos achar $A(0,0,0)$, obtido como a interseção do plano π e a reta s. Ou seja, devemos encontrar o valor de t que verifica
$$(t+1) + (2\,t) + (t-5) = 0, \quad 4\,t = 4, \quad t = 1.$$
Logo
$$A(0,0,0) = (2, 2, -4).$$

Assim a forma matricial de A é

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 2/4 & 2/4 & 2/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

---

4) Determine a inversa da matriz

$$\text{(prova A)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(prova B)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{(prova C)} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(prova D)} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

prova A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

prova B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

prova C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova D:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcularemos pelo método de Gauss a inversa de A.

1. troca da primeira e segunda linhas

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|, \qquad \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

2. terceira linha menos a primeira linha

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right|.$$

3. terceira linha mais a segunda linha

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right|.$$

4. troca da seguda e terceira linhas, dividimos por 3 a nova segunda linha

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|.$$

5. terceira linha menos a segunda linha

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right|.$$

6. primeira linha menos a terceira linha

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right|.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$