P2 de Álgebra Linear I – 2005.2

Data: 10 de outubro de 2005.

Gabarito

---

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		F	
1.b	V		
1.c	V		
1.d		F	
1.e	V		

1.a) Considere duas bases β e γ de $\mathbb{R}^2$ e um vetor v não nulo de $\mathbb{R}^2$. Suponha que o vetor v tem as mesmas coordenadas nas bases β e γ. Então as bases β e γ são iguais.

Falso: Considere, por exemplo, os vetores linearmente independentes $(1,1)$ e $(1,2)$ de $\mathbb{R}^2$ (portanto, eles formam uma base) e o vetor

$$v = 1\,(1,1) + 2\,(1,2) = (3,5).$$

Então as coordenadas de $(3,5)$ na base $\beta = \{(1,1),(1,2)\}$ são

$$(3,5)_\beta = (1,2).$$

Considere agora qualquer vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$, por exemplo $(1,0)$. Determine o vetor w pela condição

$$(3,5) = w + 2\,(1,0), \quad w = (1,5)$$

Temos que $\gamma = \{(1,5),(1,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e que as coordenadas de $v = (3,5)$ na base γ são

$$(3,5)_\gamma = (1,2).$$

Portanto, as coordenadas de v nas bases β e γ são as mesmas, mas as bases são diferentes.

1.b) Não existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que leve a reta

$$r\colon (1+t, 2+2\,t, -3-3\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$

na reta

$$s\colon (1+t, 2-t, 3+t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Verdadeiro: Veja que a reta r contém a origem (é suficiente escolher o parâmetro $t = -1$). Observe que uma transformação linear leva uma reta que contém a origem em outra reta que também contém a origem (ou no vetor nulo). Mas a reta s não contém a origem (confira).

1.c) Considere as transformações lineares

$$L, \quad T, \quad S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

cujas matrizes na base canônica são respetivamente

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad [T] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

As imagens de L, T e S são iguais.

Verdadeiro: Temos que as imagens de L, T e S são geradas pelos vetores coluna da matriz, este vetores correspondem às imagens dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$.

Veja que os conjuntos de vetores

$$\{L(\mathbf{i}), L(\mathbf{j}), L(\mathbf{k})\}$$

e

$$\{T(\mathbf{i}), T(\mathbf{j}), T(\mathbf{k})\}$$

são iguais, somente mudamos a ordem. Portanto, os espaços gerados são os mesmos.

Veja que

$$L(\mathbf{k}) = L(\mathbf{i}) + 2\,L(\mathbf{j}).$$

Portanto, como $L(\mathbf{i})$ e $L(\mathbf{j})$ são l.i., os vetores geram um plano. O vetor normal do plano é

$$(1,0,2) \times (1,1,1) = (-2,1,1).$$

Logo para as transformações L e T a imagem é o plano de equação cartesiana

$$\pi\colon 2\,x - y - z = 0.$$

Veja agora que $S(\mathbf{i})$ e $S(\mathbf{j})$ pertencem ao plano π e são l.i.. Portanto, também geram o plano mencionado. Assim, a imagem de S também é o plano π (observe que não é necessário considerar $S(\mathbf{k}) = \bar{0}$).

1.d) A transformação

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (|x|, y),$$

verifica $T(0,0) = (0,0)$ e é linear.

Falso: Veja que $T(1,0) = (1,0)$ e que $T(-1,0) = (1,0)$. Mas se T fosse linear deveria verificar

$$T(-1,0) = -T(1,0) = -(1,0).$$

1.e) Os vetores

$$\{(1,1,2); (\lambda,1,\lambda), (1,2,3)\}$$

são linearmente independentes para todo valor de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Verdadeiro: Os vetores são linearmente independentes se não são coplanares, isto é, se seu produto misto for não nulo. Calculamos o produto misto mencionado:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = 1\,(3-2\,\lambda) - \lambda\,(3-4) + 1\,(\lambda-2) =$$
$$= 3 - 2\,\lambda + \lambda + \lambda - 2 = 1 \neq 0.$$

Portanto, o determinante (produto misto) é sempre diferente de zero independentemente do valor de λ. Logo os vetores são sempre linearmente independentes.

---

2) Considere os vetores

$$v_1 = (1,2,3), \qquad v_2 = (-1,0,1)$$

e defina a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(u) = (u \cdot v_1, u \cdot v_2, u \cdot (v_1 + v_2)).$$

<u>Observação:</u> $v \cdot w$ denota o produto escalar dos vetores v e w.

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine a equação cartesiana da imagem de T.

(c) Determine as equações paramétricas do conjunto de vetores $u \in \mathbb{R}^3$ que verificam $T(u) = 0$.

(d) Determine a equação paramétrica da imagem do plano

$$\rho\colon x - y - 3z = 0$$

pela transformação T.

(e) Determine a matriz da transformação linear T^2 na base canônica.

Resposta:

(a) As colunas da matriz T são os vetores $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$. Temos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= ((1,0,0)\cdot(1,2,3),(1,0,0)\cdot(-1,0,1),(1,0,0)\cdot(0,2,4)) = \\ &= (1,-1,0); \\ \\ T(0,1,0) &= ((0,1,0)\cdot(1,2,3),(0,1,0)\cdot(-1,0,1),(0,1,0)\cdot(0,2,4)) = \\ &= (2,0,2); \\ \\ T(0,0,1) &= ((0,0,1)\cdot(1,2,3),(0,0,1)\cdot(-1,0,1),(0,0,1)\cdot(0,2,4)) = \\ &= (3,1,4). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) A imagem de T é gerada pelos vetores

$$T(\mathbf{i}) = (1,-1,0), \quad T(\mathbf{j}) = (2,0,2), \quad T(\mathbf{k}) = (3,1,4).$$

Os primeiros dois vetores são l.i. e geram o plano π cujo vetor normal é

$$(1,-1,0)\times(2,0,2) = (-2,-2,2).$$

Logo a equação cartesiana de π é

$$\pi\colon x+y-z=0.$$

Como $T(\mathbf{k}) = (3,1,4)$ pertence ao plano π, temos que os vetores $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$ geram o plano π. Logo a imagem de T é o plano π e sua equação cartesiana é

$$\pi\colon x+y-z=0.$$

(c) Para determinar os vetores $u=(x,y,z)$ que verificam $T(u)=\bar{0}$ devemos resolver a equação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é, o sistema linear

$$x + 2\,y + 3\,z = 0, \quad -x + z = 0, \quad 2\,y + 4\,z = 0.$$

Logo $x = z$, $y = -2\,z$. Escolhendo z como parâmetro temos

$$(t, -2\,t, t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Verifique que $T(1, -2, 1) = \bar{0}$.

(d) Observe que para obter uma base do plano ρ é suficiente escolher dois vetores não paralelos de ρ, por exemplo,

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (3, 0, 1).$$

Observe que a imagem de ρ pela transformação T é gerada por $T(v_1)$ e $T(v_2)$. Isto é,

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

e

$$T(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Temos $T(v_2) = 2\,T(v_1)$, portanto os vetores geram uma reta r (que contém a origem) cuja equação paramétrica é

$$r\colon (3\,t, -t, 2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(e) Para encontrar a matriz de T^2 devemos considerar o produto

$$[T^2] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1)\,(1) + (2)\,(-1) + (3)\,(0) & (1)\,(2) + (2)\,(0) + (3)\,(2) & (1)\,(3) + (2)\,(1) + (3)\,(4) \\ (-1)\,(1) + (0)\,(-1) + (1)\,(0) & (-1)\,(2) + (0)\,(0) + (1)\,(2) & (-1)\,(3) + (0)\,(1) + (1)\,(4) \\ (0)\,(1) + (2)\,(-1) + (4)\,(0) & (0)\,(2) + (2)\,(0) + (4)\,(2) & (0)\,(3) + (2)\,(1) + (4)\,(4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 8 & 17 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & 18 \end{pmatrix}.$$

3) Considere os vetores

$$u_1 = (0,3,2), \quad u_2 = (1,2,1), \quad u_3 = (4,5,2), \quad u_4 = (-4,1,2).$$

(a) Determine a equação cartesiana do subespaço $\mathbb{V}$ gerado pelos vetores u_1, u_2, u_3 e u_4.

(b) Determine uma base β do subespaço $\mathbb{V}$ formada por vetores do conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

(c) Considere agora o vetor v que na base β tem coordenadas

$$(v)_\beta = (2,1).$$

Determine as coordenadas do vetor v na base canônica.

Resposta:

(a) Observe que os vetores u_1 e u_2 são l.i.. Portanto geram o plano de vetor normal

$$u_1 \times u_2 = (0,3,2) \times (1,2,1) = (-1,2,-3).$$

Logo o plano gerado pelos vetores u_1 e u_2 é

$$\pi \colon x - 2\,y + 3\,z = 0.$$

Veja que os vetores u_3 e u_4 também pertencem a π:

$$1\,(4) - 2\,(5) + 3\,(2) = 0, \quad 1\,(-4) - 1(2) + 3\,(2) = 0.$$

Logo os vetores u_1, u_2, u_3 e u_4 geram o plano π.

(b) Para determinar uma base do plano é suficiente escolher dois vetores l.i. (não paralelos) dentre os vetores u_1, u_2, u_3 e u_4. Por exemplo,

$$\beta = \{(0,3,2), (1,2,1)\}.$$

(c) Se as coordenadas do vetor v na base β são $(v)_\beta = (2, 1)$ isto significa que

$$v = 2\,(0, 3, 2) + 1\,(1, 2, 1) = (1, 8, 5).$$

---

4) Considere as seguintes retas de $\mathbb{R}^2$

$$r_1\colon 3\,x - y = 5, \qquad r_2\colon (t-1, -2\,t+7), \quad t \in \mathbb{R}.$$

e

$$s_1\colon (2\,t-1, t+3), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad s_2\colon 3\,x - y = 9.$$

Determine a forma matricial de uma transformação afim S

$$S\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

que verifica

$$S(r_1) = s_1 \qquad \text{e} \qquad S(r_2) = s_2.$$

Resposta: Determinamos primeiro as interseções das retas r_1 e r_2 e das retas s_1 e s_2. Para determinar a interseção de r_1 e r_2, devemos encontrar o valor de t tal que

$$3\,(t-1) - (-2\,t+7) = 5, \quad 5\,t - 10 = 5, \quad t = 3.$$

Logo o ponto de interseção é $(2, 1)$.

Analogamente, para achar interseção de s_1 e s_2, devemos encontrar o valor de t tal que

$$3\,(2\,t-1) - (t+3) = 9, \quad 5\,t - 6 = 9, \quad t = 3.$$

Logo o ponto de interseção é $(5, 6)$.

O processo para determinar a transformação afim S é o seguinte. Determinamos primeiro as retas paralelas às retas dadas que contém a origem. Em forma paramétrica, temos

- $r_1' = (t, 3\,t), \quad t \in \mathbb{R}$, vetor diretor $(1, 3)$,
- $r_2' = (t, -2\,t), \quad t \in \mathbb{R}$, vetor diretor $(1, -2)$,

- $s'_1 = (2\,t, t), \quad t \in \mathbb{R}$, vetor diretor $(2,1)$,
- $s'_2 = (t, 3\,t), \quad t \in \mathbb{R}$, vetor diretor $(1,3)$.

Observe que para determinar uma transformação linear L que leva r'_1 em s'_1 é suficiente que L leve o vetor diretor da reta r'_1 no vetor diretor da reta s'_1:

$$L(1,3) = (2,1).$$

Analogamente, para obter uma transformação linear L que leva r'_2 em s'_2 é suficiente

$$L(1,-2) = (1,3).$$

Como $\{(1,3),(1,-2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, L está totalmente determinada. Temos

$$L(0,5) = L(1,3) - L(1,-2) = (1,-2), \qquad L(0,1) = (1/5, -2/5).$$

Portanto,

$$L(1,-2) = L(1,0) - 2\,L(0,1) = (1,3),$$

e

$$L(1,0) = (1,3) + 2\,L(0,1) = (7/5, 11/5).$$

Logo a matriz de L é

$$[L] = \begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 \\ 11/5 & -2/5 \end{pmatrix}.$$

Portanto a transformação afim S procurada pode ser obtida como a composição das seguintes transformações (translações e lineares):

1. translação T_1 de vetor $(-2,-1)$, esta transformação leva r_1 em r'_1 e r_2 em r'_2,
$$[T_1] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix};$$
2. a transformação L, que leva r'_1 em s'_1 e r'_2 em s'_2,
$$[L] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 \\ 11/5 & -2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

3. a translação T_2 de vetor $(5,6)$, esta transformação leva s_1' em s_1 e s_2' em s_2,

$$[T_2]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y+6 \end{pmatrix}.$$

Por construção, a composição das três transformações leva r_1 em s_1 e r_2 em s_2. A forma matricial é a seguinte. A transformação $L \circ T_1$ é

$$\begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 \\ 11/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 \\ 11/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15/5 \\ -20/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 \\ 11/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, compondo com T_2 obtemos

$$\begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 \\ 11/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$[S]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 & 1/5 \\ 11/5 & -2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$