Gabarito da P2 de Algebra linear I

(1) Decida se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa.

(a) V
(b) F
(c) V
(d) V
(e) V
(f) F
(g) V
(h) F
(i) V

(2) (a) Achar a inversa A^{-1} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resposta: A matriz A^{-1} é

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

(b) Verificar explícitamente (fazendo o produto de matrizes) que a primeira coluna de $A^{-1}A$ é $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Resposta: A resposta consiste em escrever por extenso os produtos escalares das linhas de A^{-1} com a primeira coluna de A. Desta forma obtem-se os coeficientes da primeira coluna do produto de ambas matrizes, que deve ser a primeira coluna da identidade.

(c) Calcular $det(A^{-1})$.

Resposta: O determinante de A é $\frac{9}{2}$, e portanto o determinante de A^{-1} é $\frac{2}{9}$.

(3) Sabemos que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear tal que

$$T(1,2) = (-1,0,1), \ T(1,1) = (0,1,-2).$$

(a) Ache a matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Resposta: A matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) A transformação T é injetiva? Justifique.
Resposta: A transformação linear é injetiva. Basta verificar que os vetores $T(1,2)$ e $T(1,1)$ são linearmente independentes. Isto implica que $T(v) = (0,0,0)$ se e somente se $v = (0,0)$, o que caracteriza a injetividade segundo foi discutido em aula.

(c) A transformação T é sobrejetiva? Justifique.
Resposta: A transformação não é sobrejetiva, porque a imagem de T é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado por dois vetores, $T(1,2)$ e $T(1,1)$. Decorre disto que a imagem de T é no máximo um plano de $\mathbb{R}^3$, e assim a imagem de T não pode ser todo $\mathbb{R}^3$.

(d) Caso T não seja sobrejetiva, determine a equação cartesiana do conjunto imagem $T(\mathbb{R}^2)$.
Resposta: A imagem de T é o plano gerado por $(-1,0,1)$ e $(0,1,-2)$ que passa pela origem. Fazendo o produto vetorial desses vetores obtemos um vetor normal ao plano procurado, $(-1,-2,-1)$. Portanto, a equação do plano é $x + 2y + z = 0$.

(4) (a) Considere a reta $r(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Determine a direção w tal que a projeção na reta $r(t)$ do vetor $(1,1)$ na direção de w seja $(1,2)$.
Resposta: A direção w é determinada pelo vetor $(0,1)$.

(b) A matriz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

representa na base canónica a projeção ortogonal em uma reta $r(t) = tv$. Ache o vetor v.
Resposta: Os quadrados das coordenadas do vetor unitário v que gera a reta $r(t)$ aparecem na diagonal da matriz. Portanto, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

(c) Ache a matriz que representa na base canónica o espelhamento em torno à reta $r(t) = tv$.

Resposta: A matriz do espelhamento é obtida pela fórmula $E = 2M - I$. A matriz é

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$