P2 de Álgebra Linear I – 2003.1
Data: 12 de maio de 2003.

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "N= não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	V		
1.b		F	
1.c		F	
1.d	V		
1.e		F	
1.f	V		
1.g	V		
1.h		F	
1.i		F	
1.j	V		

1.a) Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma a parábola $y = x^2$ na reta $y = x$.

Resposta: Verdadeiro, a projeção na reta $y = x$ na direção do vetor $(0, 1)$, definida por $P(x, y) = (x, x)$, transforma a parábola na reta. Observe que onde $P(x, x^2) = (x, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1.b) Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma a reta $y = x$ na parábola $y = x^2$.

Resposta: Falso, a imagem por uma transformação linear de uma reta que contém a origem é uma reta ou o vetor nulo. Considere a reta $r = (tv_1, tv_2)$,

$t \in \mathbb{R}$, de vetor diretor v. Seja

$$T(v) = T(v_1, v_2) = w = (w_1, w_2),$$

então $T(r) = (tw_1, tw_2)$, $t \in \mathbb{R}$, que é a reta de vetor diretor w (se $w \neq \bar{0}$) que contém a origem.

1.c) Se v_1 e v_2 são vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ então $\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resposta: Falso, a afirmação somente é verdadeira se os vetores v_1 e v_2 não são paralelos. Por exemplo, se $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (2,2,2)$, então $v_1 \times v_2 = 0$, e $\{v_1, v_2, \bar{0}\}$ não é uma base.

1.d) Se $\{v_1, v_2\}$ é uma base do plano $ax + by + cz = 0$ então $\{v_1, v_2, v_3\}$, $v_3 = (a, b, c)$, é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resposta: Verdadeiro, pois os vetores v_1, v_2 e v_3 não são coplanares. Observe que $v_1 \times v_2$ é um vetor normal ao plano, ou seja, $v_1 \times v_2 = \lambda v_3$ para algum número rela $\lambda \neq 0$. Portanto,

$$v_3 \cdot (v_1 \times v_2) = \lambda |v_3|^2 \neq 0,$$

ou seja, o determinante cujas linhas são os vetores v_1, v_2 e v_3 é não nulo, e os vetores formam uma base.

1.e) Seja T uma transformação linear, $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que leva o plano $x + y + z = 0$ na reta $(t, -t, t)$, então $\{T(\mathbf{i}), T(\mathbf{j}), T(\mathbf{k})\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resposta: Falso. Se $\{T(\mathbf{i}), T(\mathbf{j}), T(\mathbf{k})\}$ fosse uma base, então o determinante de T seria não nulo e T seria inversível. Em particular, $T(v) \neq \bar{0}$ para todo vetor não nulo v. Mas se $T(\pi)$ é uma reta, dados dois vetores não paralelos v e w de π teriamos

$$T(v) = (\lambda, -\lambda, \lambda), \quad T(w) = (\sigma, -\sigma, \sigma),$$

para certos números reais λ e σ direfentes de 0. Portanto,

$$T(v/\lambda) = T(w/\sigma) = (1, -1, 1), \quad T(v/\lambda - w/\sigma) = \bar{0}.$$

Como $(v/\lambda - w/\sigma) \neq 0$ (pois v e w não são paralelos) obtemos uma contradição.

1.f) Seja T uma transformação linear, $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que o determinante de T é não nulo, então $\{T(\mathbf{i}), T(\mathbf{j}), T(\mathbf{k})\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resposta: Verdadeiro. Temos

$$T(\mathbf{i}) \cdot (T(\mathbf{j}) \times T(\mathbf{k})) = \det([T]) \neq 0,$$

ou seja os vetores não são coplanares e, portanto, formam uma base.

1.g) Existe um espelhamento E de $\mathbb{R}^3$ que transforma o vetor $(2,1,2)$ no vetor $(1,2,-2)$.

Resposta: Verdadeiro. Veja que os dois vetores possuem o mesmo módulo. O espelhamento no plano contendo a origem cujo vetor normal é $(1,2,-2)-(2,1,2)=(-1,1,-4)$ verifica a propriedade do enunciado.

1.h) Considere vetores v, y e w de $\mathbb{R}^3$ linearmente dependentes. Então existem números reais σ e λ tais que $v = \sigma y + \lambda w$.

Resposta: Falso. O fato dos vetores v, y e w serem l.d. implica que há um vetor que pode ser escrito como combinação linear dos outros dois, não que todo vetor possa ser escrito como combinação linear dos outros dois. Por exemplo, os vetores

$$v = (1,1,1), \quad y = (1,0,0), \quad w = (2,0,0)$$

são l.d. e v não pode ser escrito como c.l. de y e w (verifique).

1.i) Dada uma base $\beta = \{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$ considere a nova base

$$\gamma = \{u+v+w, u-v, u-w\}$$

de $\mathbb{R}^3$ e o vetor h cujas coordenadas na base β são $(1,1,1)$. Então as coordenadas de h na base γ são $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Resposta: Falso. Se as coordenadas de h na base γ fossem $(1/3,1/3,1/3)$ então,

$$h = (1/3)(u+v+w) + (1/3)(u-v) + (1/3)(u-w) = u,$$

e as coordenadas de h na base β seriam $(1,0,0)$ e não $(1,1,1)$.

1.j) Considere os vetores v_1 e v_2 na figura e o vetor $v = \lambda\, v_1 + \lambda\, v_2$, onde $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Então o vetor v está na região (ilimitada) R hachurada abaixo, onde r_1 e r_2 são as retas que passam pela origem e têm vetores diretores v_1 e v_2, respetivamente.

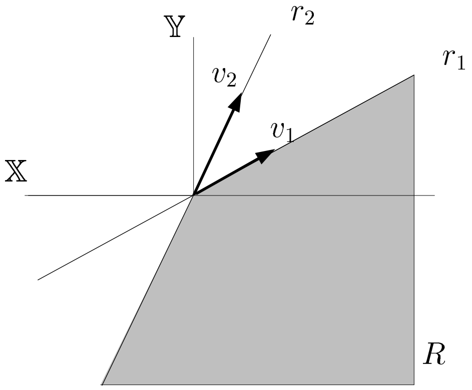

Figura 1: Questão 1.j

Resposta: Verdadeiro, veja a figura.

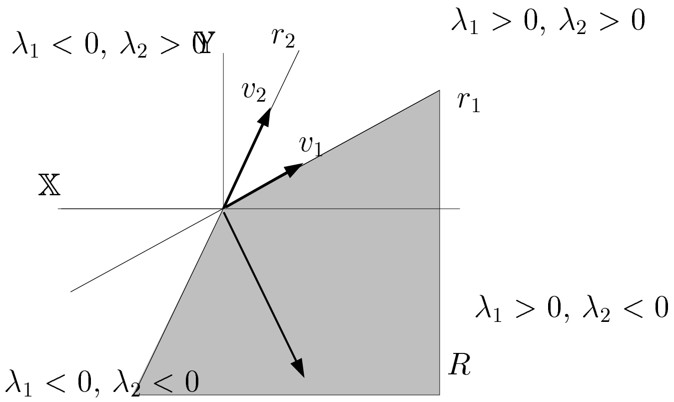

Figura 2: Resposta à questão 1.j

2)

a) Escreva o vetor $v = (1,2)$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-2,0)$ e $v_3 = (1,0)$.

b) Determine os subconjuntos de $\{v_1, v_2, v_3\}$ que são base de $\mathbb{R}^2$.

c) Encontre uma base $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que o vetor $(1,2,3)$ tenha coordenadas $(1,1,1)$ na base β. Mostre que o conjunto β encontrado é de fato uma base.

d) Considere o conjunto $\mathbb{X}$ de vetores $v = (a,b,c)$ cujas coordenadas são solução do sistema

$$x + y = 1, \quad z = 0,$$

isto é, $a + b = 1$ e $c = 0$. Encontre vetores v_1 e v_2 tais que o conjunto gerado por v_1 e v_2 contenha o conjunto $\mathbb{X}$.

Resposta:

2.a) Escrevemos

$$(1,2) = x(1,1) + y(-2,0) + z(1,0),$$

e chegamos ao sistema

$$1 = x - 2y + z, \quad 2 = x,$$

cujas soluções são da forma $(2, y, -1 + 2y)$. Logo é suficiente escrever

$$(1,2) = 2(1,1) + y(-2,0) + (-1 + 2y)(1,0),$$

onde y pode ser qualquer número real.

2.b) As bases de $\mathbb{R}^2$ estão formadas por dois vetores. Portanto, devemos considerar os três possíveis grupos de dois vetores,

- $\{(1,1), (-2,0)\}$, é base, pois os vetores não são paralelos,

- $\{(1,1),(1,0)\}$, é base, pois os vetores não são paralelos,
- $\{(-2,0),(1,0)\}$, não é base, pois os vetores são paralelos.

2.c) Devemos encontrar três vetores que formem uma base de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$(1,2,3) = u_1 + u_2 + u_3.$$

Por exemplo, $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$ e $u_3 = (0,0,1)$, que é uma base. Outra possibilidade, $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,2,0)$ e $u_3 = (0,0,3)$, que também é uma base.

Certamente, há muitas outras possibilidades. De fato, v. poderia considera dos vetores (a,b,c) e (d,e,f) tais que $(1,2,3), (a,b,c), (d,e,f)$ não sejam coplanares, isto é, tais que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0.$$

Então, as coordenadas de $(1,2,3)$ na base

$$\gamma = \{(a,b,c), (d,e,f), (1-a-d, 2-b-e, 3-d-f)\}$$

são $(1,1,1)$. Devemos provar dois afirmações, γ é uma base e as coordenadas do vetor são $(1,1,1)$. A segunda afirmação (assumindo que γ é base) é direta:

$$(1,2,3) = (a,b,c) + (d,e,f) + (1-a-d, 2-b-e, 3-d-f).$$

Para ver que γ é base, devemos verificar que

$$\begin{vmatrix} 1-a-d & 2-b-e & 3-c-f \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0.$$

Mas isto decorre do fato dos vetores $(1,2,3), (a,b,c), (d,e,f)$ não serem coplanares pois

$$\begin{vmatrix} 1-a-d & 2-b-e & 3-c-f \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0,$$

onde a igualdade é obtida somando a segunda e a terceira linhas à primeira.

2.d) As coordenadas dos vetores do conjunto $\mathbb{X}$ verificam a equação do plano que contém à reta r de equações cartesianas $(x+y=1$ e $z=0)$, e a origem. Este plano é paralelo aos vetores $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$. Logo todo vetor de $\mathbb{X}$ pode ser escrito como combinação linear de $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

Observe que as coordenadas dos vetores de $\mathbb{X}$ verificam $(t,1-t,0)$ para algum t, logo temos

$$v=(t,1-t,0)=t(1,0,0)+(1-t)(0,1,0).$$

3) Considere o vetor $u=(1,1,1)$ e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(v)=v\times u-v,$$

a) Determine a matriz de T.

b) Determine a fórmula de T.

c) Estude se T é inversível e em caso afirmativo, determine a matriz inversa de T.

Resposta:

3.a,b) Temos

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (x,y,z) = \\ &= (y-z, z-x, x-y)-(x,y,z) = \\ &= (-x+y-z, -x-y+z, x-y-z). \end{aligned}$$

Obtendo a fórmula de T.

Para determinar a matriz $[T]$ de T veja que

$$T(\mathbf{i})=(-1,-1,1), \quad T(\mathbf{j})=(1,-1,-1), \quad T(\mathbf{k})=(-1,1,-1).$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.c) Para ver se T é inversível calcularemos o determinante de T,

$$\det([T]) = -1(1+1) - 1(1-1) - 1(1+1) = -4 \neq 0,$$

logo a transformação é inversível.

Para calcular a inversa usaremos o método de Gauss. Escrevemos a matriz de T e ao lado a matriz identidade.

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

As operações que efetuaremos são:

- segunda linha mais primeira e terceira linha mais primeira,

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & 1 \end{array},$$

- segunda e terceira linha são dividas por (-2),

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/2 & 0 & -1/2 \end{array},$$

- primeira linha mais segunda,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & -1 & | & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/2 & 0 & -1/2 \end{array},$$

- primeira linha mais terceira,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/2 & 0 & -1/2 \end{array},$$

- troca das primeira e segunda linhas,

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/2 & 0 & -1/2 \end{array},$$

finalizando o processo.

Logo a inversa de T é,

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Verifiquemos que os cálculos feitos estão corretos.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1/2+1/2=1 & 1/2-1/2=0 & -1/2+1/2=0 \\ 1/2-1/2=0 & 1/2+1/2=1 & 1/2-1/2=0 \\ -1/2+1/2=0 & -1/2+1/2=0 & 1/2+1/2=1 \end{pmatrix}.$$

4) Considere o plano $\pi\colon x-y-z=0$ e o vetor $v=(1,0,0)$.

(a) Determine $P_{\pi,\mathbf{i}}((1,0,0))$, $P_{\pi,\mathbf{i}}((0,1,0))$ e $P_{\pi,\mathbf{i}}((0,0,1))$, isto é, as imagens dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ pela projeção no plano $\pi\colon x-y-z=0$ na direção do vetor $\mathbf{i}=(1,0,0)$.

(b) Determine a matriz de $P_{\pi,\mathbf{i}}$.

Considere a matriz

$$P_{\rho,w} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que representa a projeção no plano $\rho\colon x+y+z=0$ na direção do vetor $w=(1,1,0)$.

(c) Encontre, se possível, um vetor v tal que $|P_{\rho,w}(v)| > |v|$, caso seja impossível justifique por quê não existe dito vetor.

(d) Determine a matriz da transformação linear $T = P_{\rho,w} \circ P_{\pi,\mathbf{i}}$.

(e) Verifique que

$$T(1,1,0) = T(1,0,0) = (0,0,0) \quad \text{e} \quad T(0,1,-1) = (0,1,-1).$$

Para isto v. não necessita calcular explicitamente a matriz de T.

(f) Interprete geometricamente a transformação linear T.

Resposta:
4.a) Resolveremos este item de duas formas. Primeiro determinaremos as imagens dos elementos de uma base apropriada de $\mathbb{R}^3$ por $P_{\pi,\mathbf{i}}$, de esta forma $P_{\pi,\mathbf{i}}$ está totalmente determinada. Observe que

- como $(1,0,0)$ é a direção de projeção, $P_{\pi,\mathbf{i}}(1,0,0) = (0,0,0)$,
- como os vetores $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$ pertencem ao plano de projeção,

$$P_{\pi,\mathbf{i}}((1,1,0)) = (1,1,0), \quad P_{\pi,\mathbf{i}}((1,0,1)) = (1,0,1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P_{\pi,\mathbf{i}}((0,1,0)) &= P_{\pi,\mathbf{i}}((1,1,0) - (1,0,0)) = \\ &= P_{\pi,\mathbf{i}}((1,1,0) - P_{\pi,\mathbf{i}}((1,0,0)) = (1,1,0). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} P_{\pi,\mathbf{i}}((0,0,1)) &= P_{\pi,\mathbf{i}}((1,0,1) - (1,0,0)) = \\ &= P_{\pi,\mathbf{i}}((1,0,1) - P_{\pi,\mathbf{i}}((1,0,0)) = (1,0,1). \end{aligned}$$

Outra possibilidade é usando geometria analítica, dado um vetor (a,b,c), a reta que passa pelo ponto (a,b,c) e é paralela a $\mathbf{i}$ é

$$(a+t, b, c), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A interseção desta reta como o plano $x - y - z = 0$ ocorre quando t verifica

$$(a+t) - b - c = 0, \quad t = -a + b + c.$$

Portanto, a reta intercepta o plano π no ponto $(b+c, b, c)$. Portanto,

$$P_{\pi,\mathbf{i}}(1,0,0) = (0,0,0), \quad P_{\pi,\mathbf{i}}(0,1,0) = (1,1,0), \quad P_{\pi,\mathbf{i}}(0,0,1) = (1,0,1).$$

4.b) Agora estamos em condições de determinar a matriz de $P_{\pi,\mathbf{i}}$,

$$[P_{\pi,\mathbf{i}}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.c) O vetor $\mathbf{k}$ é tal que $|P_{\rho,w}(\mathbf{k})| > |\mathbf{k}|$:

$$|P_{\rho,w}(\mathbf{k})| = |(-1/2, -1/2, 1)| = \sqrt{1 + 1/4 + 1/4} > 1 = |\mathbf{k}|.$$

Observe que a condição $|P(v)| \leq |v|$ somente é válida nas projeções ortogonais.

4.d) Para determinar a matriz de T devemos considerar o produto de matrizes

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.e) Para ver que T verifica

$$T(1,1,0) = T(1,0,0) = (0,0,0) \quad \text{e} \quad T(0,1,-1) = (0,1,-1).$$

podemos usar a matriz de T ou bem observar que

$$T(1,1,0) = P_{\rho,w}(P_{\pi,\mathbf{i}})((1,1,0)),$$

como $(1,1,0)$ pertence a π,

$$P_{\pi,\mathbf{i}}((1,1,0)) = (1,1,0),$$

e como $(1,1,0)$ é a direção de projeção de $P_{\rho,w}$, $P_{\rho,w}((1,1,0) = (0,0,0))$.

Analogamente,

$$T(1,0,0) = P_{\rho,w}(P_{\pi,\mathbf{i}}((1,0,0))),$$

e como $(1,0,0)$ é a direção de projeção de $P_{\pi,\mathbf{i}}$,

$$P_{\pi,\mathbf{i}}((1,0,0)) = (0,0,0),$$

e portanto $T((1,0,0)) = (0,0,0)$.

Finalmente, observe que o vetor $(0,1,-1)$ pertence aos planos de projeção ρ e π, portanto,

$$P_{\pi,\mathbf{i}}((0,1,-1)) = P_{\rho,w}((0,1,-1)) = (0,1,-1),$$

logo

$$P_{\rho,w}(P_{\pi,\mathbf{i}}((0,1,-1))) = P_{\rho,w}((0,1,-1)) = (0,1,-1).$$

4.f) As informações no item anterior implicam que os vetores do plano gerado pelos vetores $(1,0,0)$ e $(1,1,0)$ se transformam por T no vetor nulo, e que o vetor $(0,1,-1)$ se transforma nele próprio, logo T representa a projeção na reta $(0,t,-t)$, $t \in \mathbb{R}$ (isto é, a reta paralela a $(0,1,-1)$ que passa pela origem) na direção do plano (paralelamente) $z = 0$.