P2 de Álgebra Linear I – 2002.2

Data: 11 de outubro de 2002.

Gabarito

1) Considere a família de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E} = \{(1,2,3),(1,1,2),(2,2,4),(1,1,1),(2,2,2)\}.$$

1.a) Estude se os vetores da família $\mathcal{E}$ são linearmente independentes.

1.b) Determine todas as bases de $\mathbb{R}^3$ formadas por vetores diferentes que podem ser obtidas usando os vetores de $\mathcal{E}$ (isto é, bases formadas pelos mesmos vetores em ordem diferente contam como a mesma, ou seja, as bases $\{u,v,w\}$ e $\{v,w,u\}$ contam uma única vez).

Considere agora a família de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,2,1), u_3 = (0,1,1)\}.$$

1.c) Veja que β é uma base de $\mathbb{R}^3$.

1.d) Determine as coordenadas do vetor $(3,6,5)$ na base β.

1.e) Considere agora o vetor w que na base β tem coordenadas $(1,1,1)_\beta$ (isto é, $w = 1\,u_1 + 1\,u_2 + 1\,u_3$). Determine as coordenadas de w na base canônica.

1.f) Considere agora os vetores w_1, w_2 e w_3 que na base β têm coordenadas

$$w_1 = (1,1,0)_\beta, \quad w_2 = (1,2,2)_\beta, \quad w_3 = (0,-2,-1)_\beta.$$

Estude se os vetores w_1, w_2 e w_3 formão uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resposta:

item (a): Os vetores da família $\mathcal{E}$ não são l.i.: um conjunto com mais de três vetores de $\mathbb{R}^3$ nunca é l.i. (o maior número de vetores l.i. em $\mathbb{R}^3$ é três).

V. também pode obter explicitamente combinações lineares não trivias cujo resultado é o vetor nulo. Por exemplo:

$$(2,2,2) - 2\,(1,1,1) = (0,0,0).$$

item (b): Observe que uma base de $\mathbb{R}^3$ não pode conter simultaneamente os vetores $(1,1,2)$ e $(2,2,4)$, pois $(2,2,4) = 2\,(1,1,2)$, e, portanto, toda família de vetores contendo $(1,1,2)$ e $(2,2,4)$ é l.d..

Similarmente, uma base de $\mathbb{R}^3$ não pode conter simultaneamente os vetores $(1,1,1)$ e $(2,2,2)$, pois $(2,2,2) = 2\,(1,1,1)$, e, portanto, toda família de vetores contendo $(1,1,1)$ e $(2,2,2)$ é l.d..

Feitas estas observações, construiremos as bases possíveis, lembrando antes que uma base de $\mathbb{R}^3$ está formada por três vetores l.i.

Consideremos agora as bases que contém o vetor $(2,2,2)$. Como os vetores $(2,2,2)$ e $(1,1,2)$ não são paralelos podem formar parte de uma base. Similarmente, os vetores $(2,2,2)$ e $(2,2,4)$ podem formar parte da mesma base.

Pelos comentários já feitos,

- uma base contendo os vetores $(2,2,2)$ e $(1,1,2)$ não pode conter nem $(1,1,1)$ nem $(2,2,4)$. Logo a única possibilidade é que o terceiro vetor seja $(1,2,3)$. Logo um candidato a base é

  $$\beta_1 = \{(2,2,2),(1,1,2),(1,2,3)\},$$

  faltando conferir que os vetores são l.i..

- uma base contendo os vetores $(2,2,2)$ e $(2,2,4)$ não pode conter nem $(1,1,1)$ nem $(1,2,2)$. Logo a única possibilidade é que o terceiro vetor seja $(1,2,3)$. Logo um candidato a base é

  $$\beta_2 = \{(2,2,2),(2,2,4),(1,2,3)\},$$

  faltando conferir que os vetores são l.i..

Observe que conferir que os vetores de β_1 e β_2 são l.i. é o mesmo (os determinante cujas linhas são os vetores são um múltiplo do outro). Para ver que são l.i.,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\,(6-8) - 2\,(6-4) + 2\,(4-2) = \\ = -4 - 4 + 4 = 4 \neq 0.$$

Logo os vetores são l.i.

Consideremos agora as bases que contém o vetor $(1,1,1)$. Como os vetores $(1,1,1)$ e $(1,1,2)$ não são paralelos podem formar parte de uma base. Similarmente, os vetores $(1,1,1)$ e $(2,2,4)$ podem formar parte da mesma base. Como no caso anterior,

- uma base contendo os vetores $(1,1,1)$ e $(1,1,2)$ não pode conter nem $(2,2,2)$ nem $(2,2,4)$. Logo a única possibilidade é que o terceiro vetor seja $(1,2,3)$. Logo um candidato a base é
$$\beta_3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,3)\},$$
faltando conferir que os vetores são l.i.. Mas isto decorre como no caso da base β_1.

- uma base contendo os vetores $(1,1,1)$ e $(2,2,4)$ não pode conter nem $(2,2,2)$ nem $(1,2,2)$. Logo a única possibilidade é que o terceiro vetor seja $(1,2,3)$. Logo um candidato a base é
$$\beta_4 = \{(1,1,1),(2,2,4),(1,2,3)\},$$
faltando conferir que os vetores são l.i.. Mas isto decorre como nos casos anteriores.

De fato já obtivemos todas as bases possíveis. Se consideramos agora as bases contendo $(2,2,4)$ obteremos bases com os mesmos vetores que β_2 e β_4. Se consideramos agora as bases contendo $(1,1,2)$ obteremos bases com os mesmos vetores que β_1 e β_3. Finalmente, toda base deve necessariamente conter o vetor $(1,2,3)$: isto é decorre dos vetores $(1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,1,2)$ e $(2,2,2)$ serem coplanares, todos estão no plano $x-y=0$, que não contém o vetor $(1,2,3)$.

V. poderia fazer de outra forma. Primeiro observar que os vetores $(1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,1,2)$ e $(2,2,4)$ são coplanares (todos estão no plano $\pi\colon x-y=0$) portanto, como o vetor $(1,2,3)$ não pertence ao plano π, necessariamente deve formar parte das bases. Fazendo uma árvore, obtemos

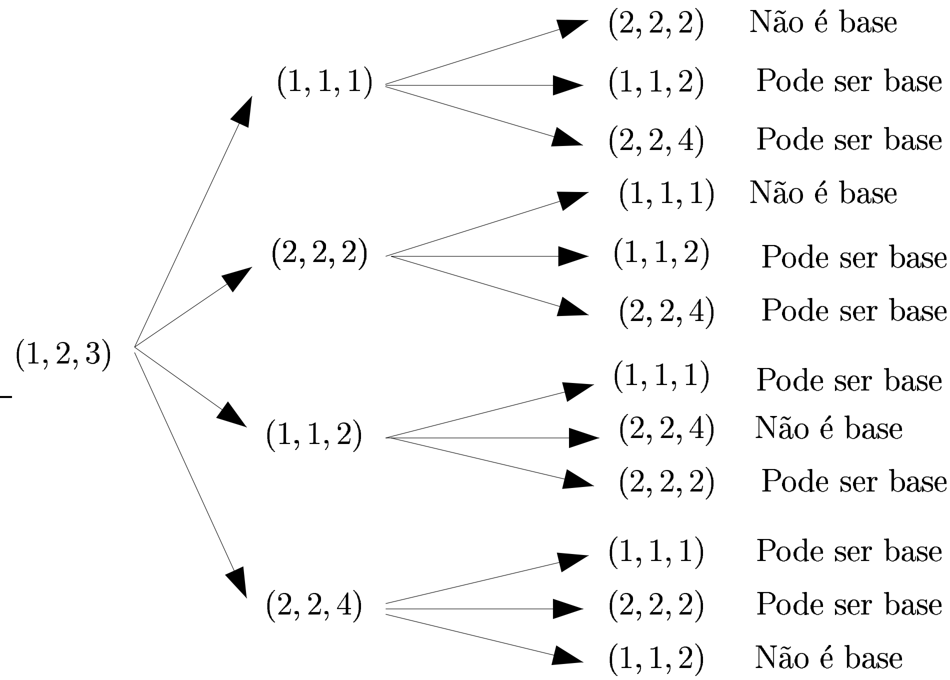


Figura 1: Bases contendo $(1, 2, 3)$

Observe que v. obtem oito bases, mas somente quatro com vetores diferentes.

item (c): É suficiente ver que os vetores são l.i., ou seja que seu produto misto é não nulo. Temos

$$\begin{aligned}(1,1,1)\cdot[(1,2,1)\times(0,1,1)] &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 1\,(2-1) - 1\,(1-0) + 1\,(1-0) = \\ &= 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0.\end{aligned}$$

Logo os vetores são l.i. e, portanto, β é uma base (três vetores l.i. de $\mathbb{R}^3$ formam uma base).

item (d): Devemos escrever

$$w = (3, 6, 5) = x\,(1, 1, 1) + y\,(1, 2, 1) + z\,(0, 1, 1),$$

onde (x, y, z) serão as coordenadas de w na base β. Temos os sistema

$$3 = x + y, \quad 6 = x + 2\,y + z, \quad 5 = x + y + z.$$

Da primeira e terceira equações obtemos $z = 2$. Logo, substituindo $z = 2$ nas duas primeiras equações,

$$3 = x + y, \quad 4 = x + 2\,y.$$

Logo $y = 1$ e $x = 2$. Portanto, as coordenadas de w na base β são $(2, 1, 2)$.

item (e): Temos que

$$w = (1, 1, 1) + (1, 2, 1) + (0, 1, 1) = (2, 4, 3).$$

Logo as coordenadas de w na base canônica são $(2, 4, 3)$.

item (f): Para ver que os vetores formam uma base é suficiente ver que são l.i., ou seja, que a única combinação linear destes vetores que fornece o vetor nulo é a trivial (todos os coeficientes iguais a zero). Suponhamos que

$$x\,w_1 + y\,w_2 + z\,w_3 = \bar{0}.$$

Temos que ver que $x = y = z = 0$. Escrevendo os vetores w_1, w_2 e w_3 em função de u_1, u_2 e u_3,

$$x\,(u_1 + u_2) + y\,(u_1 + 2\,u_2 + 2\,u_3) + z\,(-2\,u_2 - u_3) = \bar{0}.$$

Ou seja

$$(x + y)\,u_1 + (x + 2\,y - 2\,z)\,u_2 + (2\,y - z)\,u_3.$$

Como os vetores u_1, u_2 e u_3 são l.i.,

$$x + y = 0, \quad x + 2\,y - 2\,z = 0, \quad 2\,y - z = 0.$$

Da primeira e da última equação temos, $x = -y$ e $z = 2\,y$. Logo, substituindo na segunda, $-y + 2\,y - 4\,y = -3\,y = 0$, $y = 0$. Logo $x = y = z = 0$, portanto a única combinação linear dos vetores w_1, w_2, w_3 que é o vetor nulo é a trivial. Logo, os vetores são l.i., e, portanto, base.

2) Considere o vetor $u = (1, 1, 1)$ e a transformação linear definida como

$$T(v) = v \times u.$$

a) Determine a fórmula de $T(x,y,z)$.

b) Determine a matriz de T.

c) Sem fazer cálculos, é $T^2 = T$?

d) Existe v tal que $T^2(v) = 0$ e $T(v) \neq 0$?

Resposta: Para o item (a). Temos

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{i}\,(y-z) - \mathbf{j}\,(x-z) + \mathbf{k}\,(x-y) = \\ &= (y-z, z-x, x-y). \end{aligned}$$

Portanto, a forma geral de T é

$$T(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y).$$

Param o item (b), observe que, da forma geral de T temos,

$$T(i) = (0,-1,1), \quad T(j) = (1,0,-1), \quad T(k) = (-1,1,0).$$

Logo

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(x,y,z) = (y-z, -x+z, x-y).$$

Para resolver (c). Sem fazer cálculos, considere um vetor não nulo w perpendicular a $u = (1,1,1)$. Então $T(w)$ é não nulo e perpendicular a w e a u. Agora, $T^2(w)$ é perpendicular a $T(w)$ e u, logo $T^2(w)$ é não nulo e perpendicular a $T(w)$, logo $T(w) \neq T^2(w)$.

A resposta ao último item é negativa: se $T(v) \neq 0$ teremos (necessariamente) $T(v)$ ortogonal a u. Logo $T^2(v) = T(v) \times u \neq 0$ e o módulo de $T^2(v)$ é $|T(v)||(1,1,1)| = \sqrt{3}|T(v)|$, que sempre será não nulo se $T(v)$ é não nulo. Ou seja, $T^2(v)$ é nulo se, e somente se, $T(v) = \bar{0}$.

Outra forma é fazer as contas. Veja que

$$[T][T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Veja agora que $T^2(x,y,z) = \bar{0}$ é equivalente a,

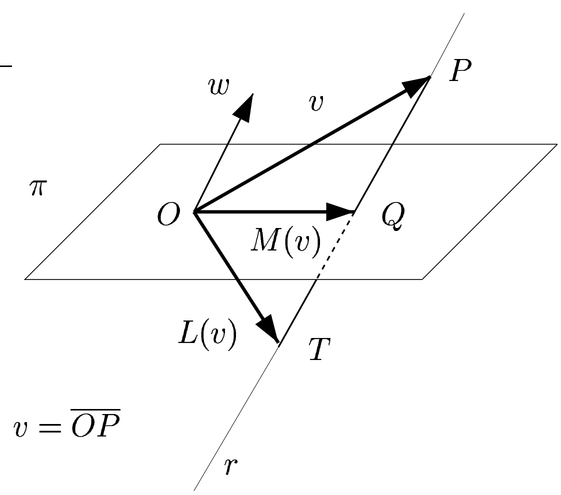
$$-2x + y + z = 0, \quad x - 2y - z = 0, \quad x + y - 2z = 0.$$

Resolvendo, as soluções são da forma (t,t,t), $t \in \mathbb{R}$. Mas, em todos os casos, $T(t,t,t) = 0$. Portanto, $T^2(v) = \bar{0}$ se, e somente se, $T(v) = \bar{0}$.

3) Dados o plano $\pi\colon x - y + z = 0$ e o vetor $w = (1,1,1)$, considere a transformação linear M definida como segue, dado um ponto $P = (x,y,z)$ considere o vetor $\overline{OP} = (x,y,z)$ e defina

$$M(\overline{OP}) = \overline{OQ},$$

onde Q é o ponto de interseção do plano π e da reta r que contém P e é paralela a w. Veja a figura.



Considere também a transformação linear L definida como segue,

$$L(\overline{OP}) = \overline{OT},$$

onde T é o ponto da reta r tal que Q é equidistante de T e de P. Veja a figura.

a) Determine a matriz da transformação linear M.

b) Determine a matriz da transformação linear L.

c) Dado um vetor v escreva v em função de $L(v)$ e $M(v)$.

d) Estude se as transformações lineares M e L são inversíveis. Quando possível, calcule a matriz inversa.

Resposta: Para determinar as matrizes de M e de L procederemos de duas formas diferentes.

Primeiro, observe que dado um vetor de coordenadas $v = (x, y, z)$ o vetor $M(x, y, z)$ tem como coordenadas a interseção do plano $x - y + z = 0$ e da reta $(x + t, y + t, z + t)$. Esta interseção ocorre quando

$$(x + t) - (y + t) + (z + t) = 0, \quad t = -x + y - z.$$

Ou seja no ponto

$$(y - z, -x + 2\,y - z, y - x).$$

Ou seja,

$$M(x, y, z) = (y - z, -x + 2\,y - z, y - x),$$

e sua matriz é

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar L observe que

$$L(v) = M(v) - w,$$

onde o vetor w é

$$v = M(v) + w, \quad w = v - M(v).$$

Logo,

$$L(v) = M(v) - (v - M(v)) = 2\,M(v) - v.$$

Veja que estamos respondendo ao item (c):

$$v = 2\,M(v) - L(v).$$

Em resumo,

$$[L] = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Outra forma de determinar M e L é considerar a seguinte base de $\mathbb{R}^3$: $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$. Por definição,

$$\begin{aligned} M(1,1,0) &= L(1,1,0) = (1,1,0), \\ M(0,1,1) &= L(0,1,1) = (0,1,1), \\ M(1,1,1) &= (0,0,0), \\ L(1,1,1) &= (-1,-1,-1). \end{aligned}$$

Portanto, se $v = a\,(1,1,0) + b\,(0,1,1) + c\,(1,1,1)$ temos

$$\begin{aligned} M(v) &= a\,(1,1,0) + b\,(0,1,1), \\ L(v) &= a\,(1,1,0) + b\,(0,1,1) - c\,(1,1,1). \end{aligned}$$

Observe que dado um vetor (x,y,z) temos

$$(x,y,z) = a\,(1,1,0) + b\,(0,1,1) + c\,(1,1,1),$$

onde

$$b = y - x, \quad a = (y - z) \quad c = z - b = z - (y - x) = x - y + z.$$

Logo,

$$(1,0,0) = 0\,(1,1,0) + (-1)\,(0,1,1) + 1\,(1,1,1),$$

portanto,

$$M(1,0,0) = (0,-1,-1), \quad L(1,0,0) = (-1,-2,-2).$$

Analogamente,

$$(0,1,0) = 1\,(1,1,0) + (1)\,(0,1,1) + (-1)\,(1,1,1),$$

portanto,

$$M(0,1,0) = (1,2,1), \quad L(1,0,0) = (2,3,2).$$

Finalmente,

$$(0,0,1) = (-1)\,(1,1,0) + 0\,(0,1,1) + (1)\,(1,1,1),$$

portanto,

$$M(0,0,1) = (-1,-1,0), \quad L(0,0,0) = (-2,-2,-1).$$

veja que obtemos as mesmas matrizes.

Finalmente, para o item (d). Temos que M não é injetora, pois $M(1,1,1) = (0,0,0)$. Portanto, não possui inversa. V. também pode ver que seu determinante é nulo:

$$\det[M] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1)(0-1) + (-1)(-1+2) = 1 - 1 = 0.$$

Para a transformação L veja que $L^2 = Id$. Observe que se $v = M(v) + w$, onde w é paralelo à direção de projeção, então

$$L(v) = L(M(v)) + L(w),$$

e, observando que $L(w) = -w$ e $L(M(v)) = M(v)$, temos

$$L(v) = M(v) - w.$$

Agora temos,

$$L(L(v)) = L(M(v)) - L(w) = M(v) - (-w) = M(v) + w = v.$$

Logo $L^2 = L \circ L = Id$, e a inversa de L é a própria L.

V. pode também calcular o determinante de L, que é -1. Logo possui inversa. E pode calcular a inversa pelo método de Gauss.