P2 de Álgebra Linear I – 2002.1
Data: 4 de maio de 2002.

Gabarito

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

1.a) Seja P uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ tal que $P^2 = P \circ P = P$, então P é uma projeção ortogonal.

Falso: Por exemplo considere P sendo a identidade.

1.b) Considere vetores v, y e w de $\mathbb{R}^3$ linearmente dependentes. Então existem números reais σ e λ tais que $v = \sigma y + \lambda w$.

Falso: É suficiente considerar vetores y e w colineares e v qualquer vetor não paralelo a y e w. Os vetores são l.d. e v não pode ser escrito como combinação linear de y e w. Por exemplo, considere os vetores $v = (1, 1, 1)$, $y = (1, 0, 1)$ e $w = (2, 0, 2)$.

1.c) Seja $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma projeção ortogonal em um plano e $E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um espelhamento em um plano. Então $E \circ P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma projeção ortogonal.

Falso: É suficiente considerar uma projeção e um espelhamento em planos diferentes. Por exemplo, sejam P a projeção ortogonal no plano $z = 0$ e E o espelhamento no plano $y = 0$. As matrizes de E e P são

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A composição $E \circ P$ tem como matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que não representa uma projeção, pois

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A.$$

1.d) Sejam π_1, π_2 e π_3 três planos de $\mathbb{R}^3$ contendo a origem e P_1, P_2 e P_3 as respetivas projeções ortogonais nestes planos. Suponha que $P_3 \circ P_2 \circ P_1$ é a transformação linear nula. Então os planos se interceptam em um ponto.

Verdadeiro: Se se interceptaram em mais de um ponto a interseção conteria uma reta r contendo a origem. Seja $v \neq \bar{0}$ o vetor diretor da reta r. Como v pertence a todos os planos, $P_1(v) = P_2(v) = P_3(v) = v$. Logo $P_3 \circ P_2 \circ P_1(v) = v \neq \bar{0}$, e a transformação é diferente da transformação nula.

1.e) Dada uma base $\beta = \{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$ considere a nova base $\gamma = \{u + v + w, u + v, u + w\}$ de $\mathbb{R}^3$. Considere o vetor h cujas coordenadas na base β são $(1, 1, 1)$. Então as coordenadas de h na base γ são $(1/3, 2/3, 1/3)$.

Falso: Se as coordenadas de h na base γ fossem $(1/3, 2/3, 1/3)$

teriamos

$$h = 1/3(u+v+w) + 2/3(u+v) + 1/3(u+w) = 4/3u + v + 2/3w.$$

Logo as coordenadas de h na base β seriam $(4/3, 1, 2/3) \neq (1, 1, 1)$, o que fornece uma contradição.

1.f) A matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é sempre inversível (independentemente do valor de a).

Verdadeiro: O determinante da matriz é independente de a e vale -1, logo a matriz é sempre inversível (tem determinante não nulo).

1.g) Seja A uma matriz 2×2 inversível. Suponha que $A^2 = 2A$. Então $\det A = 2$.

Falso: Como o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes e $A^2 = (2I)A$ (I a matriz identidade), temos

$$\det(A) = \det(2I) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 = 4 \neq 2.$$

1.h) Existe uma projeção ortogonal $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $P(1,1,2) = (0,1,1)$.

Falso: Caso existisse, teriamos que

$$(1,1,2) = (0,1,1) + n,$$

onde n é ortogonal a $(0,1,1)$. Mas, $n = (1,0,1)$ que não é ortogonal a $(0,1,1)$ (veja que $(1,0,1) \cdot (0,1,1) = 1 \neq 0$).

1.i) Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$T(1,0,0) = (1,1)$, $T(1,1,0) = (1,1)$, $T(1,1,1) = (1,1)$.

Verdadeiro: Uma transformação linear definida em $\mathbb{R}^3$ está determinada pelas imagens de três vetores l.i., como é o caso. De fato, a matriz de T é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique (aplique a matriz aos vetores $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$ e veja que o resultado sempre é o vetor $(1,1)$).

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		F	
1.b		F	
1.c		F	
1.d	V		
1.e		F	
1.f	V		
1.g		F	
1.h		F	
1.i	V		

2) Estude quais das matrizes

2.a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

2.b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

representam uma projeção (ortogonal ou não) ou um espelhamento.

- No caso das projeções determine se são ou não ortogonais. No caso ortogonal, determine a reta ou o plano de projeção, e no caso não ortogonal a direção (reta ou plano) de projeção e o plano ou reta de projeção.
- No caso dos espelhamentos determine a reta ou o plano de espelhamento.

Resposta: Para o item (2.a) observe que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $P^2 = P$ é uma condição necessária para representar uma projeção, a resposta é que P não representa uma projeção.

Também sabemos que não representa um espelhamento: seu determinante é nulo (e um espelhamento tem determinante não nulo).

Para o item (2b) veja que a matriz tem determinante nulo, logo não pode representar um espelhamento. Para ver se representa uma projeção vemos que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Logo, a priori, pode ser uma projeção. Em tal caso, $P(i)$ e $P(j)$ devem pertencer à reta de projeção. Logo a reta de projeção deverá ser (t, t), $t \in \mathbb{R}$. Em tal caso, deveriamos ter $P(1, 1) = (1, 1)$ (o que acontece, verifique).

Os vetores paralelos à direção de projeção devem verificar $P(x,y) = (0,0)$. Para determinar esta direção resolvemos o sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad 2x - y = 0.$$

Logo a direção de projeção é $(1,2)$. A resposta é: *a matriz representa uma projeção na reta* (t,t), $t \in \mathbb{R}$, *na direção do vetor* $(1,2)$.

3) Considere a projeção P no plano $\pi\colon x + y - z = 0$ na direção do vetor $(1,-1,-1)$.

3.a) Considere o vetor $u = (4,-1,1) = (2,-2,-2) + (2,1,3)$ (onde $(2,1,3) \in \pi$). Sem determinar a matriz de P, calcule $P(u)$.

3.b) Determine a matriz de P.

3.c) Sejam M a projeção ortogonal na reta $(t,-t,-t)$ e N a projeção ortogonal no plano $\pi\colon x - y - z = 0$. Determine as matrizes de M e N.

3.d) Determine as matrizes de $P \circ M$ e $M \circ P$.

Resposta: Para o primeiro item observe que $P(2,-2,-2) = 0$ (pois $(2,-2,-2)$ é paralelo à direção de projeção) e que $P(2,1,3) = (2,1,3)$ (pois $(2,1,3)$ pertence ao plano de projeção). Logo, como P é linear,

$$P(u) = P(4,-1,1) = P(2,-2,-2) + P(2,1,3) = (2,1,3).$$

Para determinar a matriz de P escolhemos uma base de π (por exemplo $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$) e acrescentamos o vetor $(1,-1,-1)$

para obter uma base de $\mathbb{R}^3$. Para cada vetor v escrevemos

$$v = x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(1,-1,-1).$$

Então, pelos argumentos do primeiro item, temos,

$$P(v) = x(1,0,1) + y(0,1,1).$$

Temos,

$$(1,0,0) = x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(1,-1,-1).$$

Logo,

$$1 = x + z, \quad 0 = y - z, \quad 0 = x + y - z.$$

Logo $x = 0$, $z = 1$ e $y = 1$. Portanto,

$$P(1,0,0) = (0,1,1).$$

Analogamente,

$$(0,1,0) = x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(1,-1,-1).$$

Logo

$$0 = x + z, \quad 1 = y - z, \quad 0 = x + y - z.$$

Logo $x = -1$, $z = 1$ e $y = 2$. Portanto,

$$P(0,1,0) = (-1,2,1).$$

Finalmente,

$$(0,0,1) = x(1,0,1) + y(0,1,1) + z(1,-1,-1).$$

Logo

$$0 = x + z, \quad 0 = y - z, \quad 1 = x + y - z.$$

Logo $x = 1$, $z = -1$ e $y = -1$. Portanto,

$$P(0,0,1) = (1,-1,0).$$

A matriz de P é

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para o terceiro item observe que $M + N = Id$. O vetor diretor unitário na direção da reta de projeção de M é $v = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$. Portanto,

$$M(u) = (u \cdot v)v.$$

Logo

$$\begin{aligned} M(1,0,0) &= (1/3, -1/3, -1/3), \\ M(0,1,0) &= M(0,0,1) = (-1/3, 1/3, 1/3). \end{aligned}$$

Portanto,

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

$$N = Id - M, \quad N = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Para o último item observamos que a matriz de $P \circ M$ é:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De fato, não é necessário fazer cáculos. Considere uma base $\{e, f, v\}$, onde v é a direção de projeção de P (e ao mesmo tempo o vetor da reta de projeção de M) e e e f são vetores paralelos ao plano de projeção de P. Temos $M(e) = \sigma v$ e $M(f) = \lambda v$. Logo

$$P \circ M(e) = \sigma P(v) = \bar{0}, \quad P \circ M(f) = \lambda P(v) = \bar{0}.$$

Respeito ao vetor v, $M(v) = v$ e $P(M(v)) = P(v) = \bar{0}$. Como $P \circ M$ transforma os elementos da base no vetor zero, temos que $P \circ M$ é transformação linear nula.

Para calcular a matriz de $M \circ P$ escrevemos

$$\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = $$
$$= \begin{pmatrix} -2/3 & -4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 & -2/3 \\ 2/3 & 4/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

4) Seja β a base formada pelos vetores $\{(1,1,1), (1,0,1), (0,1,1)\}$.

4.a) Verifique que β é uma base.

4.b) Determine as coordenadas do vetor $v = (1,2,3)$ na base β.

4.c) Seja S a transformação linear definida por

$$S(u) = u \times (1,1,1).$$

Calcule a matriz de$S$.

4.d) Determine se a matriz de S é inversível e em caso afirmativo determine sua inversa.

Resposta: Para o item (a) é suficiente ver que o determinante cujas colunas são os vetores da base é não nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(0-1) - 1(1-1) + 0(1-0) = -1 \neq 0.$$

Para determinar as coordenadas do vetor $(1,2,3)$ escrevemos

$$(1,2,3) = x(1,1,1) + y(1,0,1) + z(0,1,1).$$

Logo,

$$1 = x + y, \quad 2 = x + z, \quad 3 = x + y + z.$$

Escalonando obtemos:

$$1 = x + y, \quad 1 = -y + z, 2 = z.$$

Logo $z = 2$, $y = 1$ e $x = 0$. As coordenadas do vetor na base β são $(0,1,2)$

Para determinar a matriz de S observe que

$$\begin{aligned} S(1,0,0) &= (1,0,0) \times (1,1,1) = (0,-1,1), \\ S(0,1,0) &= (0,1,0) \times (1,1,1) = (1,0,-1), \ . \\ S(0,0,1) &= (0,0,1) \times (1,1,1) = (-1,1,0). \end{aligned}$$

Logo a matriz de S é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente S não é inversível. Isto pode ser visto calculando o determinante da matriz de S e vendo que é zero. Mas nem é necessário fazer cálculos, os vetores $S(1,0,0)$, $S(0,1,0)$ e $S(0,0,1)$ são coplanares (e portanto seu produto misto, igual ao determinante, é nulo): todos estes vetores são (por definição) ortogonais a $(1,1,1)$, logo estão no plano $x+y+z=0$.