P2 de Álgebra Linear I – 2001.2
Data: Sábado, 20 de outubro de 2001.
Gabarito

1) Estude se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. Justifique cuidadosamente sua resposta. Nos casos afirmativos encontre a matriz da transformação linear envolvida.

a) Existe uma rotação R tal que $R(2,1) = (1,3)$.

b) Existe um espelhamento ou reflexão E tal que $E(1,1) = (-1,1)$ e $E(-1,1) = (1,-1)$.

c) Existe uma projeção ortogonal P tal que $P(1,1) = (1/2,-1/2)$ e $P(2,1) = (1/3,2/3)$.

d) Existe um espelhamento ou reflexão E tal que $E(1,1) = (1,1)$ e $E(2,1) = (-2,-1)$.

e) Existe um espelhamento ou reflexão E tal que $E(2,1) = (-1,-2)$.

f) Existe uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1) = (5,7)$, $T(2,1) = (1,0)$ e $T(3,2) = (1,2)$.

Resposta:

a) Falso. Uma rotação conserva módulos, $|R(u)| = |u|$ para todo vetor u. Mas

$$|R(2,1)| = |(1,3)| = \sqrt{10} > \sqrt{5} = |(1,2)|.$$

b) Falso. Um espelhamento verifica $E^2 = E \circ E = Id$. No nosso caso,

$$E^2(1,1) = E(E(1,1)) = E(-1,1) = (1,-1) \neq (1,1).$$

c) Falso. Se P é uma projção ortogonal de $\mathbb{R}^2$ dado qualquer vetor u sua imagem $P(u)$ é paralela à reta de projeção r. Da primeira condição, $P(1,1) = (1/2,-1/2)$, obtemos que $r = (t,-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Da segunda condição, $P(2,1) = (1/3,2/3)$, temos $r = (t,2t)$, o que é absurdo.

d) Falso. A condição $E(1,1) = (1,1)$ implica que, se E fosse um espelhamento, então a reta de projeção seria (t,t), $t \in \mathbb{R}$.

A segunda condição, $E(2,1) = (-2,-1)$, implica que $(2,1)$ é um vetor normal à reta de espelhamento. Mas $(2,1)$ não é ortogonal a $(1,1)$.

e) Verdadeiro. Da condição $E(2,1) = (-1,-2)$ e de $E(v) - v = n$, n vetor normal à reta de espelhamento, obtemos

$$n = (-3,-3).$$

Logo a reta de espelhamento é $(t,-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Logo

$$E(1,-1) = (1,-1), \quad E(1,1) = (-1,-1).$$

Portanto,

$$E(2,0) = (0,-2), \quad E(1,0) = (0,-1).$$

Finalmente,

$$E(0,1) = E(1,1) - E(1,0) = (-1,-1) - (0,-1) = (-1,0).$$

Logo

$$[E] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique que $E(2,1) = (-1,-2)$.

f) Falso. Como $\{(1,1),(2,1)\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$ (os vetores não são paralelos) as imagens de $(1,1)$ e $(2,1)$ determinam T. Se T fosse linear,

$$T(3,2) = T((1,1)+(2,1)) = T(1,1)+T(2,1) = (5,7)+(1,0) = (6,7) \neq (1,2).$$

2) Considere a transformação linear L, $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$L(1,1,1) = (1,0,0), \quad L(1,0,1) = (0,0,1), \quad L(1,1,0) = (0,1,0).$$

a) Determine $L(1,0,0)$ e $L(0,0,1)$.

b) Determine a matriz de L.

c) Calcule $L(1,2,3)$.

d) Estude se L é inversível.

Resposta: Observe que $(1,1,1)$, $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$ formam uma base, e portanto L está totalmente definida. Para ver que os vetores formam uma base é suficiente calcular o produto misto dos três vetores e ver que é não nulo (ou seja, que os vetores não são coplanares),

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-1) - 1(0-1) + 1(1-0) = 1 \neq 0.$$

a) Observe que
$$(0,1,0) = (1,1,1) - (1,0,1).$$
Logo
$$L(0,1,0) = L(1,1,1) - L(1,0,1) = (1,0,0) - (0,0,1) = (1,0,-1).$$
Observe que
$$(1,0,0) = (1,1,0) - (0,1,0).$$
Logo
$$L(1,0,0) = L(1,1,0) - L(0,1,0) = (0,1,0) - (1,0,-1) = (-1,1,1).$$
Finalmente calcularemos $L(0,0,1)$. Observe que,
$$(0,0,1) = (1,1,1) - (1,1,0).$$
Logo
$$L(0,0,1) = L(1,1,1) - L(1,1,0) = (1,0,0) - (0,1,0) = (1,-1,0).$$

b) Do item (a) e como $L(0,1,0)$ já esta determinado (ou seja, conhecemos $L(1,0,0), L(0,1,0)$ e $L(0,0,1)$) temos
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Para calcular $L(1,2,3)$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2+3 \\ 1+0-3 \\ 1-2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

d) Para ver se L é inversível calcularemos o determinante de L:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0-1) - 1(0+1) + 1(-1-0) = -1 \neq 0.$$

Como L é inversível se, e somente se, $\det[L] \neq 0$, temos que L é inversível.

3) Considere os vetores

$$v_1 = (1,1,1), \quad v_2 = (1,1,0), \quad v_3 = (0,1,1).$$

a) Estude se os vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Dado um vetor w escreva

$$w = av_1 + bv_2 + cv_3$$

e considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(w) = bv_2 + cv_3.$$

b) Determine $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$

c) Determine a matriz de T.

d) Estude se T é inversível. Caso afirmativo encontre a matriz T^{-1}.

e) Determine a matriz de $T^8 = T \circ T \circ T \circ T \circ T \circ T \circ T \circ T$.

Resposta:

a) Para ver se os vetores formam uma base é suficiente ver se são l.i., *três vetores l.i. de* $\mathbb{R}^3$ *formam uma base.* Para ver se são l.i. é suficiente calcular seu produto misto $v_1 \cdot (v_2 \times v_3)$. Se for 0 os vetores são l.d., caso contrário são l.i.

$$v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1-0) - 1(1-0) + 1(1-0) = 1 \neq 0.$$

Logo os vetores são l.i. e formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Observe que

$$\begin{aligned} (1,0,0) &= 1(1,1,1) + 0(1,1,0) + (-1)(0,1,1), \\ (0,0,1) &= 1(1,1,1) + (-1)(1,1,0) + (0)(0,1,1). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$(0,1,0) = x(1,1,1) + y(1,1,0) + z(0,1,1),$$

que leva ao sistema,

$$x + y = 0, \quad x + y + z = 1, \quad x + z = 0.$$

Temos $x = -y$ e $z = y$, logo $y = 1 = z$ e $x = -1$. Portanto,

$$(0,1,0) = (-1)(1,1,1) + (1)(1,1,0) + (1)(0,1,1),$$

Da definição de T temos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= 0(1,1,0) + (-1)(0,1,1) = (0,-1,-1), \\ T(0,1,0) &= (1,1,0) + (0,1,1) = (1,2,1), \\ T(0,0,1) &= (-1)(1,1,0) + (0)(0,1,1) = (-1,-1,0). \end{aligned}$$

Isto responde ao item (b). De fato também responde ao item (c), pois calculamos $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$.

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Para ver que esta é a matriz pedida, verifique que $T(1,1,1) = 0$, $T(1,1,0) = (1,1,0)$ e $T(0,1,1) = (0,1,1)$).

d) A transformação não é inversível pois existe $v \neq 0$, $v = (1,1,1)$ que se transforma no vetor nulo. Outra forma é ver que o determinante vale zero:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0(0-1) + (-1)(0-1) + (-1)(-1+2) = 1 - 1 = 0.$$

e) A transformação linear representa a projeção no plano paralelo a $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$ que contém a origem (isto é, $x-y+z=0$) segundo a direção $(1,1,1)$. Como toda projeção verifica $T^2 = T$. Temos $T^3 = T \circ T^2 = T \circ T = T^2 = T$. E indutivamente $T^8 = T$.