P1 de Álgebra Linear I – 2003.2

Data: 15 de setembro de 2003.

Gabarito Prova Modelo

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "N= não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.1, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.1.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b	x		
1.c	x		
1.d	x		
1.e		x	
1.f		x	
1.g	x		
1.h		x	
1.i		x	
1.j	x		

1.a) Considere vetores u e w de $\mathbb{R}^3$. Como $u \times u = \bar{0}$, então se verifica

$$u \times (u \times w) = (u \times u) \times w = \bar{0}.$$

Resposta: Falso. É suficiente considerar os vetores $u = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$ e

$w = \mathbf{j} = (0,1,0)$. Temos $u \times w = \mathbf{k} = (0,0,1)$. Portanto,

$$(1,0,0) \times ((1,0,0) \times (0,1,0)) = (1,0,0) \times (0,0,1) = (0,-1,0) = -\mathbf{j}.$$

Por outro lado, sempre, $u \times u = \bar{0}$, logo a segunda igualdade sempre é nula.

1.b) Sejam u, w, h e ℓ quatro vetores coplanares de $\mathbb{R}^3$. Então se verifica

$$(u \times w) \times (\ell \times h) = \bar{0}.$$

Resposta: Verdadeiro.

Seja n o vetor normal do plano π paralelo aos vetores considerados. Veja que $u \times w = \lambda\, n$ e $\ell \times h = \sigma n$ para certos números λ e σ (pois estes produtos vetorias são ortogonais ao plano π). Portanto,

$$(u \times w) \times (\ell \times h) = (\lambda n) \times (\sigma n) = (\lambda\, \sigma)(n \times n) = \bar{0}.$$

1.c) Sejam u e w vetores de $\mathbb{R}^3$ de mesmo módulo. Então

$$(u + w) \cdot (u - w) = 0.$$

Resposta: Verdadeiro. Veja que

$$\begin{aligned}(u + w) \cdot (u - w) &= u \cdot u - u \cdot w + w \cdot u - w \cdot w = (u \cdot u) - (w \cdot w) = \\ &= |u|^2 - |w|^2 = 0.\end{aligned}$$

1.d) A área do triângulo de vértices $A = (1,2,1)$, $B = (0,1,1)$ e $C = (1,1,1)$ é $1/2$.

Resposta: Verdadeiro. A área pedida é a metade da área do paralelogramo de lados $\overline{AB} = (1,1,0)$ e $\overline{AC} = (0,1,0)$. Este paralelogramo tem área

$$\frac{|(1,1,0) \times (0,1,0)|}{2} \frac{|(0,1,0)|}{2} = \frac{1}{2}.$$

1.e) Considere vetores u, w e ℓ não nulos de $\mathbb{R}^2$. Sejam $P_\ell(u)$ e $P_\ell(w)$ as projeções ortogonais de u e w (respetivamente) no vetor ℓ. Suponha que

$$P_\ell(u) = P_\ell(w).$$

Então $u = w$.

Resposta: Falso. Considere um vetor n não nulo ortogonal a ℓ e os vetores $u = \ell + n$ e $v = n + 2\ell$. Os vetores são diferentes e se verifica que $P_\ell(u) = P_\ell(w)$. Provemos esta afirmação, para simplificar suporemos que ℓ é unitário, então

$$P_\ell(u) = (u \cdot \ell)\ell = ((\ell + n) \cdot \ell)\ell = (\ell \cdot \ell + \ell \cdot n)\ell = \ell.$$

Analogamente, $P_\ell(w) = \ell$.

1.f) Considere a reta r_1 paralela ao vetor u contendo o ponto P. Considere a reta r_2 paralela ao vetor w contendo o ponto Q. Suponha que o produto misto

$$\overline{PQ} \cdot (u \times w) = 0.$$

Então as retas se interceptam.

Resposta: Falsa. A afirmação somente é verdadeira quando as retas não são paralelas. Por exemplo, considere as retas $(t, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, e $(s, 1, 0)$, $s \in \mathbb{R}$, a distância entre as retas é um e, como seus vetores diretores são paralelos, o produto misto anterior é nulo.

1.g) Considere os vetores

$$u = (111, 222, 333) \quad \text{e} \quad w = \quad (5467 + 111t, 9156789 + 222t, 1543 + 333t).$$

O produto vetorial $u \times w$ é independente de t.

Resposta: Verdadeiro. Considere o vetor $\ell = (5467, 9156789, 1543)$ e observe que $w = \ell + t\,u$. Portanto

$$u \times w = u \times (\ell + t\,u) = u \times \ell + t(u \times u) = u \times \ell,$$

que é independente de t.

1.h) Considere os planos de equação cartesianas

$$\pi\colon x - y - z = 4 \quad \text{e} \quad \rho\colon x - y - z = 1.$$

A distância entre π e ρ é $4 - 1 = 3$.

Resposta: Falso. A distância pedida é obtida considerando um ponto qualquer P de π, por exemplo $P = (4, 0, 0)$, e um ponto qualquer Q de ρ, por exemplo $Q = (1,0,0)$, e a distância é o módulo do vetor

$$\frac{\overline{QP} \cdot (1,-1,-1)}{(1,-1,-1)\cdot(1,-1,-1)}\,(1,-1,-1) = \frac{(3,0,0)\cdot(1,-1,-1)}{(1,-1,-1)\cdot(1,-1,-1)}\,(1,-1,-1).$$

O módulo do vetor resultante $(1,-1,-1)$ é $\sqrt{3} \neq 3$.

1.i) Considere os pontos $P = (a,b,c)$ e $(-P) = (-a,-b,-c)$ e o plano $\pi\colon ax + by + cz = d$. Se as distâncias de P e $(-P)$ a π são iguais então o plano π contem a origem.

Resposta: Falso. Considere os pontos $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$ e o plano $z = 1$. As distâncias dos pontos ao plano são iguais (no caso 1) e o plano não contem a origem.

1.j) Considere um ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e o plano π. Sejam R um ponto de π e n o vetor normal de π. Seja $w = (w_1, w_2, w_3)$ o vetor projeção ortogonal de $\overline{PR}$ em n. O ponto $T = P + w$,

$$T = (p_1 + w_1, p_2 + w_2, p_3 + w_3),$$

é o ponto de π mais próximo de P.

Resposta: Verdadeiro. Por construção o ponto T pertence a π e os pontos P, T e R formam um triângulo retângulo. Logo $\overline{PT}$ é ortogonal a π e T é o ponto de interseção da reta perpendicular a π contendo P.

2) Considere o plano de equação cartesiana

$$\pi\colon x - y - z = 1$$

e os pontos $A = (2,1,0)$ e $B = (1,0,0)$ do plano π.

a) Determine o vetor $\overline{AB}$.

b) Determine um vetor w paralelo ao plano π e ortogonal ao vetor $\overline{AB}$.

c) Determine um vetor u paralelo a w e de mesmo módulo que o vetor $\overline{AB}$.

d) Determine as coordenadas de pontos C e D tais que A, B, C, e D são os vértices de um quadrado contido no plano π.

Respostas:

a) As coordenadas do vetor $\overline{AB}$ são $B - A$, ou seja

$$\overline{AB} = (1,0,0) - (2,1,0) = (-1,-1,0).$$

b) Como o vetor w é paralelo ao plano π, então o vetor w é ortogonal ao vetor n normal do plano, $n = (1,-1,1)$. Como também é ortogonal a $\overline{AB}$, temos que w é paralelo a $\overline{AB} \times n = (-1,-1,0) \times (1,-1,1)$. Portanto

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1,-1,2).$$

c) O módulo do vetor w é $\sqrt{6}$. O módulo do vetor $\overline{AB}$ é $\sqrt{2}$. Para obter o vetor u é suficiente considerar um vetor unitário paralelo a w, no caso

$$\frac{w}{\sqrt{6}} = (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$$

e multiplica-lo pelo módulo $\sqrt{2}$ de $\overline{AB}$. Obtemos o vetor

$$u = \frac{\sqrt{2}w}{\sqrt{6}} = (\sqrt{2}/\sqrt{6}, -\sqrt{2}/\sqrt{6}, 2\sqrt{2}/\sqrt{6}) = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}).$$

d) Observe que, como u é paralelo a π e os pontos A e B pertencem ao plano π, os pontos $C = A+u$ e $D = B+u$ pertencem a π. Também temos que, por construção, $\overline{AC} = \overline{BD} = u$ é ortogonal a $\overline{AB}$. Logo estes pontos determinam um retângulo. Como $\overline{AC} = u$ e u e $\overline{AB}$ têm o mesmo módulo, que é igual a $\sqrt{2}$, assim o retângulo é um quadrado. Portanto

$$C = (2 + 1/\sqrt{3}, 1 - 1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}), \qquad D = (1 + 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}).$$

3) Considere a reta r_1 de equações paramétricas

$$r_1\colon (t+1, 3t, t-2) \quad t \in \mathbb{R}$$

e a reta r_2 de equações cartesianas

$$x - z = 1, \quad x + 2y - 3z = 3.$$

a) Escreva a reta r_1 como interseção de dois planos π e ρ (escritos em equações cartesianas) tais que π seja paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e ρ seja paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$.

b) Determine uma equação paramétrica da reta r_2.

c) Determine a posição relativa das retas r_1 e r_2 (reversas, paralelas ou se interceptam).

d) Calcule a distância d entre as retas r_1 e r_2.

Respostas:

a) Observe que dois vetores parelalos ao plano π são o vetor $(1,0,0)$ (o vetor diretor do eixo $\mathbb{X}$) e o vetor $(1,3,1)$ (o vetor diretor da reta). Portanto, o vetor normal do plano π é paralelo a

$$(1,3,1) \times (1,0,0) \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,-3).$$

Portanto, o plano π é da forma,

$$y - 3z = d,$$

onde d é determinado pela condição, $(1,0,-2) \in \pi$, ou seja, $3(-2) = 6 = d$. Logo $\pi\colon\ -y + 3z = -6$.

Analogamente, dois vetores parelalos ao plano ρ são o vetor $(0,0,1)$ (o vetor diretor do eixo $\mathbb{Z}$) e o vetor $(1,3,1)$ (o vetor diretor da reta). Portanto, o vetor normal do plano π é paralelo a

$$(1,3,1) \times (0,0,1) \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3,-1,0).$$

Portanto, o plano ρ é da forma,

$$3x - y = d,$$

onde d é determinado pela condição, $(1,0,-2) \in \pi$, ou seja, $3 = d$. Logo ρ: $3x - y = 3$.

b) Uma possibilidade é resolver o sistema de equações: escolhemos z como parâmetro e temos $x = 1 + z = 1 + t$. Substituindo na segunda equação:

$$y = (3 + 3z - x)/2 = (3 + 3t - t - 1)/2 = t + 1.$$

Logo,

$$r_2\colon (1 + t, 1 + t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Outra possibilidade é determinar o vetor diretor da reta, obtido como o produto vetorial dos vetores normais dos planos dados, $(1, 0, -1) \times (1, 2, -3) = (2, 2, 2)$, ou seja podemos escolher $(1, 1, 1)$. Agora é suficiente escolher um ponto que pertença aos dois planos, por exemplo $x = 0$, $z = -1$ e $y = 0$, obtendo

$$r_2\colon (t, t, -1 + t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) e **d)** Como os vetores diretores das retas não são paralelos, as retas ou são reversas ou se interceptam.

Para resolver este item podemos ou calcular a distância ou ver se as retas se interceptam. Vejamos primeiro o último método: devemos ver se o sistema

$$1 + s = 1 + t, \quad 3t = 1 + s, \quad t - 2 = s,$$

tem solução. Da primeira equação $t = s$ e da última $2 = 0!$. Logo o sistema não tem solução e as retas são reversas.

Outro método consiste em calcular a distância d entre as retas:

$$d = \frac{|\overline{PQ} \cdot (1, 3, 1) \times (1, 1, 1)}{|(1, 3, 1) \times (1, 1, 1)|},$$

onde P é um ponto de r_1 (por exemplo, $P = (1, 0, -2)$) e Q é um ponto de r_2 (por exemplo, $Q = (1, 1, 0)$), logo $\overline{PQ} = (0, 1, 2)$. Temos

$$(1, 3, 1) \times (1, 1, 1) = (2, 0, -2),$$

e $(0, 1, 2) \cdot (2, 0, -2) = -4$. Logo $d = 4/\sqrt{8} = \sqrt{2}$.

Logo as retas são reversas e a distância é $\sqrt{2}$.

Outro método para resolver o problema é procurar pontos

$$A = (1 + s, 3s, s - 2) \in r_1 \quad \text{e} \quad B = (1 + t, 1 + t, t) \in r_2$$

tais que o módulo do vetor $\overline{AB}$ seja a distância entre as duas retas. Este vetor,

$$\overline{AB} = (t - s, 1 + t - 3s, t - s + 2)$$

deve ser ortogonal a r_1 e r_2, ou seja

$$\begin{array}{ll} (t - s, 1 + t - 3s, t - s + 2) \cdot (1, 3, 1) = 0, & 5t - 3s = -5, \\ (t - s, 1 + t - 3s, t - s + 2) \cdot (1, 1, 1) = 0, & 3t - 5s = -3. \end{array}$$

A única solução do sistema é $s = 0$ e $t = -1$. Obtemos os pontos $A = (1, 0, -2)$ e $B = (0, 0, 1)$, logo $\overline{AB} = (-1, 0, 1)$. O módulo deste vetor é $\sqrt{2}$.

4) Considere os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (2, 0, 1)$.

a) Determine uma equação paramétrica da reta r determinada pelos pontos A e B.

b) Determine o ponto médio M do segmento AB.

c) Determine a equação cartesiana do plano π cujos pontos são todos equidistantes de A e B.

d) Considere o ponto $C = (19, 21, 17)$. Determine explicitamente um ponto D a distância 17 de C.

e) Considere o plano $\rho \colon x - y + z = 0$. Determine a equação cartesiana de um plano τ a distância 5 de ρ.

Respostas:

a) O vetor diretor de r é o vetor $\overline{AB} = (1, -1, 0)$. Como um ponto da reta é $A = (1, 1, 1)$, temos

$$r \colon (1 + t, 1 - t, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) O ponto médio M tem coordenadas $(A + B)/2$. Ou de outra forma $M = A + \overline{AB}/2$. Obtemos: $M = (3/2, 1/2, 1)$.

c) O plano π deve ser normal ao vetor $\overline{AB} = (1, -1, 0)$. Logo é da forma $x - y = d$. Como M pertence a π temos

$$\pi \colon x - y = 1.$$

d) Os seis pontos mais simples são $D = (36, 21, 17)$, $D = (2, 21, 17)$, $D = (19, 4, 17)$, $D = (19, 38, 17)$, $D = (19, 21, 0)$ e $D = (19, 21, 34)$.
e) O plano ρ deve ser paralelo $\rho\colon x - y + z = 0$. Logo é da forma

$$\tau\colon x - y + z = d.$$

Para determinar d vemos que a distância d entre τ e π é o módulo do vetor

$$v = \frac{\overline{PQ} \cdot (1, -1, 1)}{(1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1)} (1, -1, 1) = \mathrm{Proj}_{n=(1,-1,1)} \overline{PQ},$$

onde P é um ponto de π (a origem, por exemplo), Q é um ponto de τ (o ponto $(d, 0, 0)$), n é o vetor normal ao plano e $\mathrm{Proj}_{n=(1,-1,1)} \overline{PQ}$ é a projeção ortogonal no vetor n, Temos $\overline{PQ} = (d, 0, 0)$ e

$$v = \frac{d}{3}(1, -1, 1).$$

O módulo do vetor é $d/\sqrt{3}$. Como queremos que a distância seja 5, temos

$$\frac{d}{\sqrt{3}} = \pm 5.$$

Portanto, $\tau\colon x - y + z = \pm 5\sqrt{3}$.