P1 de Álgebra Linear I – 2012.2

1 de setembro de 2012.

Gabarito

---

1) Determine:

(a) Os valores reais de a e b para que a interseção dos planos α, β e γ de equações cartesianas

$$\alpha\colon x + 4y + 3z = 2, \quad \beta\colon 3x + 6y + 5z = 2 \quad \text{e} \quad \gamma\colon \ : 2x + 5y + az = b$$

seja uma reta r.

(b) O valor do determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b+1 & 2c+2 \\ 3a & 3b+2 & 3c+3 \end{pmatrix}$$

sabendo que

$$a = 123, \quad b = 345 \quad \text{e} \quad c = 567.$$

Resposta:

(a) Escalonando a matriz ampliada do sistema formado pelos planos α, β e γ (se v. prefer, pode escalonar os sistemas, o que é exatamente o mesmo somente acrescentando x, y, z) tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & a & b \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & a-6 & b-4 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & a-6 & b-4 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & b-2 \end{array}\right].$$

Se escrevemos as equações por extenso (com x, y, z) temos

$$\begin{array}{llll} 1x & +4y & +3z & =2 \\ 3x & +6y & +5z & =2 \\ 2x & +5y & +az & =b \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{llll} 1x & +4y & +3z & =2 \\ 0x & -6y & -4z & =-4 \\ 0x & -3y & +(a-6)z & =b-4 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{array}{llll} 1x & +4y & +3z & =2 \\ 0x & +3y & +2z & =2 \\ 0x & -3y & +(a-6)z & =b-4 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{llll} 1x & +4y & +3z & =2 \\ 0x & +3y & +2z & =2 \\ 0x & +0y & +(a-4)z & =b-2. \end{array}$$

Desta forma, para que o sistema seja possível e indeterminado (interseção em infinitos pontos) deve-se ter a última linha formada por zeros, isto é, $a = 4$ e $b = 2$.

(b) Aplicaremos propriedades dos determinantes nas linhas da matriz A. O valor do determinante não muda se fazemos as operações elementares II linha - 2 I linha e III linha - 3 I linha. Temos:

$$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 2a & 2b+1 & 2c+2 \\ 3a & 3b+2 & 3c+3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right|.$$

Desenvolvendo pela primeira coluna obtemos

$$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right| = a\,(3-4) = -a.$$

Logo o determinante da matriz A vale -123

---

2) Considere os vetores $\overrightarrow{u} = (0, 1, -1)$ e $\overrightarrow{w} = (2, k, 0)$ de $\mathbb{R}^3$, onde $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determine **todos** os possíveis valores de k de modo que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ sejam perpendiculares.

(b) Determine **todos** os possíveis valores de k de modo que a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{w}$ sobre o vetor $\overrightarrow{u}$ seja igual ao vetor $-5\,\overrightarrow{u}$.

(c) Determine **todos** os possíveis valores de k de modo que o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ seja de 60^o.

(d) Considere o ponto $P = (1, 2, 3)$ e a reta r de equação paramétrica

$$r\colon (1, -1, 1) + t\,\overrightarrow{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine o ponto Q da reta r mais próximo do ponto P.

Resposta:

(a) Temos $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = (2, k+1, -1)$. Para que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ sejam perpendiculares basta fazer o produto escalar entre eles igual a zero. Logo,

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = (0, 1, -1) \cdot (2, k+1, -1) = 0 + k + 1 + 1 = 0 \Rightarrow k = -2.$$

(b) Temos

$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\overrightarrow{w} = \left(\frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}}\right)\overrightarrow{u} = -5\,\overrightarrow{u} \Longleftrightarrow \frac{k}{2}\,(0, 1, -1) = (0, -5, 5) \Longleftrightarrow \frac{k}{2} = -5,$$

portanto

$$k = -10.$$

(c) Temos

$$\cos(60) = \frac{1}{2} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{k}{\sqrt{2}\,\sqrt{4+k^2}} \Longleftrightarrow 2\,k = \sqrt{8 + 2\,k^2},$$

portanto

$$4k^2 = 8 + 2k^2 \Longleftrightarrow 2k^2 = 8 \Longleftrightarrow k = \pm 2.$$

(d) Seja α um plano perpendicular à reta r (portanto o vetor normal de α é paralelo ao vetor diretor de r) que passe pelo ponto $P = (1, 2, 3)$ (as coordenadas de P satisfazem a equação de α) . Assim,

$$\alpha\colon y - z = d, \quad 2 - 3 = d, \quad d = -1$$

logo

$$\alpha\colon y - z = -1$$

Nestas condições, o ponto Q de r mais próximo de P é o ponto de interseção da reta r e o plano α. Desta forma,

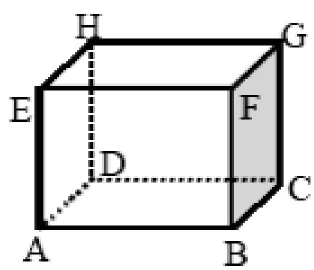
$$(-1+t) - (1-t) = -1 \Rightarrow t = 1/2.$$

Logo

$$Q = (1, -1/2, 1/2).$$

---

3) Observe o paralelepípedo a seguir sobre o qual sabe-se que:



- O plano que contém os pontos A, B e C tem equação cartesiana

$$x + y - z = -6$$

  e é perpendicular ao plano que contém os pontos A, B e F.

- A reta que passa pelos pontos D e G tem equação paramétrica $(t, 2\,t, -3\,t)$, $t \in \mathbb{R}$.

- O ponto F tem coordenadas $(0,2,0)$.

Nestas condições, determine:

(a) Uma equação cartesiana do plano que contém os pontos A, B e F.

(b) As coordenadas do ponto D.

(c) A distância entre o plano que contém os pontos A, B e C e o plano que contém os pontos E, F e G.

(d) A área do triângulo cujos vértices são os pontos A, D e F.

Resposta:

(a) Seja π_{ABF} o plano que contém os pontos A, B e F e seja $\overrightarrow{n}$ seu vetor normal. Observe que os vetores $\overrightarrow{u} = (1,1,-1)$ - normal do plano que contém os pontos A, B e C- e $\overrightarrow{v} = (1,2,-3)$ - diretor da reta que passa pelos pontos D e G - são paralelos ao plano π_{ABF} . Assim,

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{array} \right\| = (-1,2,1).$$

Como o ponto $F = (0,2,0)$ pertence ao plano π_{ABF}, tem-se que sua equação cartesiana é

$$\pi_{ABF}\colon\ -x + 2y + z = 4.$$

(b) O ponto D é o ponto de interseção da reta r_{DG} que contém os pontos D e G com o plano π_{ABC} que contém os pontos A, B e C. Assim,

$$(t) + (2t) - (-3t) = -6 \Rightarrow t = -1.$$

Logo $D(-1,-2,3)$.

(c) Seja π_{EFG} o plano que contém os pontos E, F e G. Observe que o plano π_{EFG} é paralelo ao plano π_{ABC} e contém o ponto F. Logo, tem-se que

$$\pi_{EFG}\colon x + y - z = 2.$$

Escolhemos os pontos $P(2,0,0)$ do plano π_{EFG} e $Q(-6,0,0)$ do plano π_{ABC} e consideramos o vetor $\overline{PQ} = (-8,0,0)$. Assim, a distância d entre esses planos pode ser calculada da seguinte forma:

$$d = \frac{|\overline{PQ} \cdot (1,1,-1)|}{\| (1,1,-1) \|} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

(d) Observe que a reta r_{AF} que contém A e F é paralela à reta r_{DG} que contém D e G e passa pelo ponto F. Logo

$$r_{AF}\colon (0,2,0) + t\,(1,2,-3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim, o ponto A é o ponto de interseção da reta r_{AF} com o plano π_{ABC}, ou seja,

$$(t) + (2+2t) - (-3t) = -6 \Longrightarrow t = -4/3.$$

Logo

$$A = (-4/3, -2/3, 4).$$

A área do triângulo cujos vértices são A, D e F, pode ser calculada da seguinte forma: Consideramos os vetores

$$\overline{FA} = (-4/3, -8/3, 4), \quad \overline{FD} = (-1,-4,3)$$

e o seu produto vetorial

$$\overline{FA} \times \overline{FD} = \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4/3 & -8/3 & 4 \\ -1 & -4 & 3 \end{matrix} \right\| = (8, 0, 8/3).$$

A área S do triângulo é a metade da área do paralelogramo gerado pelos vetores $\overline{FA}$ e $\overline{FD}$ que é o módulo de $\overline{FA} \times \overline{FD} = (8,0,8/3)$. Ou seja,

$$2S = \sqrt{64 + \frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{640}}{3} = \frac{8\sqrt{10}}{3} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{4\sqrt{10}}{3}.$$

---

4) Decida se cada uma das afirmações a seguir é falsa ou verdadeira. **Justifique cuidadosamente**.

(a) Existem vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ que verificam simultaneamente as condições $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0$ e $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

(b) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ tais que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, então se verifica

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{w} \|,$$

onde $\| \overrightarrow{v} \|$, denota o módulo do vetor $\overrightarrow{v}$.

(c) Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores de $\mathbb{R}^3$ então se verifica

$$\overrightarrow{w} \times (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}.$$

Resposta:

(a) FALSO.

Observe que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{w} \| \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$. Como o produto escalar entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ é zero e $\| \overrightarrow{u} \| \neq 0 \neq \| \overrightarrow{w} \|$ tem-se que $\cos\theta = 0$, portanto $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$.

Assim

$$\| \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} \| = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{w} \| \, |\mathrm{sen}\,\theta| = \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{w} \| \neq 0.$$

Logo $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$. Portanto não existem vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ que verifiquem tais condições.

(b) FALSO.

A condição $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ indica que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ são paralelos, mas eles podem formar um ângulo de π e dessa forma o produto escalar entre eles seria negativo. Considere por exemplo os vetores $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{w} = (-1,-1,-1)$. Observe que

$$(1,1,1) \cdot (-1,-1,-1) = -3.$$

Nestas condições tem-se que

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

mas

$$\| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{w} \| = 3 \neq \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = -3.$$

(c) FALSO. Temos que

$$(\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0},$$

mas $\overrightarrow{w} \times (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u})$ pode ser diferente de zero. Faça, por exemplo,

$$\overrightarrow{w} = \mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \overrightarrow{u} = \mathbf{j} = (0, 1, 0).$$

Nestas condições

$$\overrightarrow{w} \times (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}) = \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \neq \overrightarrow{0}.$$