P1 de Álgebra Linear I – 2012.1

31 de Março de 2012.

Gabarito

---

1)

a) Encontre, se possível, dois vetores não nulos $\bar{u}$ e $\bar{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que os vetores $\bar{u}+\bar{v}$ e $\bar{u}-\bar{v}$ tenham o mesmo módulo.

b) Considere dois vetores $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ de $\mathbb{R}^3$ que têm módulo 13, isto é, $||\bar{u}_1|| = ||\bar{u}_2|| = 13$. Calcule o produto escalar $(\bar{u}_1+\bar{u}_2)\cdot(\bar{u}_1-\bar{u}_2)$.

c) Considere vetores não nulos $\bar{u}$, $\bar{v}$ de $\mathbb{R}^3$ e defina $\bar{w} = \alpha\,\bar{u}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Determine α para que os vetores $(\bar{v}-\bar{w})$ e $\bar{u}$ sejam ortogonais. Note que o valor de α depende dos vetores $\bar{u}$ e $\bar{v}$.

Resposta:

a) Observe se deve verificar $||\bar{u}+\bar{v}||^2 = ||\bar{u}-\bar{v}||^2$. Isto é,

$$\begin{aligned} ||\bar{u}+\bar{v}||^2 &= (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{u} + 2\,\bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{v} = \\ ||\bar{u}-\bar{v}||^2 &= (\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{u} - 2\,\bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{v}. \end{aligned}$$

Simplificando obtemos,

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = -\bar{u}\cdot\bar{v}, \quad 2\bar{u}\cdot\bar{v} = 0.$$

Ou seja, é suficiente que os vetores sejam ortogonais (perpendiculares). Portanto, é suficiente escolher dois vetores ortogonais, por exemplo $(1,1,0)$ e $(1,-1,0)$.

b) Observe que

$$(\bar{u}_1+\bar{u}_2)\cdot(\bar{u}_1-\bar{u}_2) = \bar{u}_1\cdot\bar{u}_1 - \bar{u}_1\cdot\bar{u}_2 + \bar{u}_2\cdot\bar{u}_1 - \bar{u}_2\cdot\bar{u}_2.$$

Observe que $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1$. Portanto,

$$(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \cdot (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) = \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 = (13)^2 - (13)^2 = 0$$

c) Temos $\bar{v} - \bar{w} = \bar{v} - \alpha\, \bar{u}$. Para que este vetor seja ortogonal a $\bar{u}$, devemos ter

$$0 = (\bar{v} - \alpha\, \bar{u}) \cdot \bar{u} = \bar{v} \cdot \bar{u} - \alpha\, (\bar{u} \cdot \bar{u}).$$

Portanto,

$$\alpha = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{\bar{u} \cdot \bar{u}}.$$

---

2) Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 2, 2)$ e $C = (2, 1, 2)$.

a) Determine uma equação cartesiana do plano π que contém os pontos A, B e C.

b) Determine um ponto D tal que os pontos A, B, C e D formem um paralelogramo P.

c) Determine a área do paralelogramo P do item anterior.

Resposta:

a) Considere os vetores $\overline{AB} = (-1, 2, 1)$ e $\overline{AC} = (1, 1, 1)$. Um vetor normal do plano π é

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, -3)|.$$

Portanto, a equação cartesiana do plano é da forma

$$x + 2\, y - 3\, z = d,$$

onde d é determinado pela condição dos pontos A, B e C pertencer a π, ou seja: $1 + 0 - 3 = d = -2$.

b) Existem as seguintes possibilidades para o ponto D:

- $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$, isto é, $\overline{AB} = \pm\overline{CD}$,
- $\overline{AC}$ paralelo a $\overline{BD}$, isto é $\overline{AC} = \pm\overline{BD}$

No primeiro caso podemos ter

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{AC} + \overline{AB}, \quad D = B + C - A = (0,2,2) + (2,1,2) - (1,0,1) = (1,3,3), \\ \overline{AD} &= \overline{AB} - \overline{AC}, \quad D = B - C + A = (0,2,2) - (2,1,2) + (1,0,1) = (-1,1,1). \end{aligned}$$

No segundo caso podemos ter

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{AC} - \overline{AB}, \quad D = C - B + A = (2,1,2) - (0,2,2) + (1,0,1) = (3,-1,1), \\ \overline{AD} &= \overline{AB} - \overline{AC}, \quad D = B - C + A = (0,2,2) - (2,1,2) + (1,0,1) = (-1,1,1). \end{aligned}$$

c) A área do paralelogramo P é o módulo do vetor $\overline{AB} \times \overline{AC} = (1,2,-3)$, isto é, $|(1,2,-3)| = \sqrt{14}$.

---

3) Considere as retas r_1 de equação paramétrica

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}$$

e r_2 cujas equações cartesianas são

$$y - z = 0, \quad 2\,x - y = 2.$$

a) Determine equações cartesianas da reta r_1.

b) Determine a equação cartesiana do plano ρ que contém o ponto $Q = (1,0,0)$ e é ortogonal à reta r_1.

c) Determine, se possível, um ponto P da reta r_2 tal que a distância entre P e r_1 seja $1/3$.

d) Considere os pontos $A = (1,1,1) \in r_1$ e $B = (2,2,2) \in r_2$. Determine um ponto C de r_1 tal que o triângulo de vértices A, B, C seja retângulo e os lados AC e BC sejam seus catetos.

Resposta:

a) Temos que encontrar dois planos τ e τ' (não paralelos entre si) que contenham a reta r_1,

$$\tau\colon a\,x + b\,y + c\,z = d, \quad \tau'\colon a'\,x + b\,y + c'\,z = d.$$

Para isso os vetores diretores dos planos devem ser ortogonais ao vetor diretor da retas

$$(a, b, c) \cdot (1, 2, 2) = 0, \quad (a', b', c') \cdot (1, 2, 2) = 0$$

e os planos devem conter um ponto do plano (por exemplo $(1, 1, 1)$. Podemos escolher $(a, b, c) = (2, -1, 0)$ e $(a', b', c') = (0, 1, -1)$ obtendo os planos

$$\tau\colon 2\,x - y + = 1, \quad \tau'\colon y - z = 0.$$

Logo

$$r_1\colon \left\{ \begin{array}{l} 2\,x - y = 1, \\ y - z = 0. \end{array} \right.$$

b) O vetor normal $\bar{n}$ do plano ρ é o vetor diretor de r_1, $\bar{n} = (1, 2, 2)$. Logo

$$\rho\colon x + 2\,y + 2\,z = d.$$

Como $(1, 0, 0) \in \rho$ temos

$$\rho\colon x + 2,\ y + 2\,z = 1.$$

c) Observamos que as retas r_1 e r_2 são paralelas, para isso observamos que um vetor diretor de r_2 é $(0, 1, -1) \times (2, -1, 0) = (-1, -2, -2)$. Portanto todos os pontos de r_2 estão à mesma distância d de r_1 e esta distância é a distância entre as retas r_1 e r_2.

Calcularemos esta distância. Observe que um ponto da reta r_2 é $(1, 0, 0)$. O ponto P da reta r_1 mais próximo de $Q \in r_2$ é a interseção de r_1 e o plano ρ que contém o ponto $Q = (1, 0, 0)$ e é ortogonal à reta r_1 (ou seja, o plano ρ do item anterior). A distância entre r_1 e r_2 é o módulo do vetor $\overline{PQ}$.

Para calcular $r_1 \cap \rho$, substituímos a equação de r_1 na de ρ, obtendo

$$(1 + t) + 2\,(1 + 2\,t) + 2\,(1 + 2\,t) = 1, \quad 9\,t + 5 = 1, \quad t = -4/9.$$

Portanto,

$$P = (1 - 4/9, 1 - 8/9, 1 - 8/9) = (5/9, 1/9, 1/9).$$

Temos agora

$$\overline{PQ} = (4/9, -1/9, -1/9)$$

Portanto, a distância é $\sqrt{18}/9 = \sqrt{2}/\sqrt{9} = \sqrt{2}/3$.

Como as duas retas são paralelas, todos os pontos da reta r_2 estão a mesma distância $\sqrt{2}/3$ da reta r_1. Como $1/3 < \sqrt{2}/3$ não existe nenhum ponto de r_2 a distância $1/3$ de r_1, pois $1/3 < \sqrt{2}/3$.

d) Observamos novamente que as retas r_1 e r_2 são paralelas. O ponto C é obtido considerando a interseção da reta r_1 e o plano α ortogonal a r_1 contendo B. Em tal caso, por construção, $\overline{AC}$ é ortogonal a $\overline{BC}$ e estes lados são os catetos do triângulo.

A equação do plano α é

$$\alpha\colon x + 2y + 2z = 10.$$

A interseção de α e r_1 é obtida como segue:

$$(1 + t) + 2(1 + 2\,t) + 2(1 + 2\,t) = 10, \quad 9\,t = 5, \quad t = 5/9.$$

Portanto o ponto C é

$$C = (14/9, 19/9, 19/9).$$

Verifique que $\overline{BC} = (4/9, -1/9, -1/9)$ é ortogonal a $(1, 2, 2)$ (o vetor diretor de r_2).

---

4)

a) Considere os planos de equações cartesianas

$$\pi\colon 2x + y - z = 1, \quad \pi'\colon x + 3y - z = -1.$$

Encontre um terceiro plano τ que contenha o ponto $(1, 0, 0)$ e a interseção dos três planos π, π' e τ seja uma reta.

b) Considere os planos de π_1, π_2, π_3 de equações cartesianas

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \pi_1: & & x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ \pi_2: & & 2x & + & 4y & + & z & = & b \\ \pi_3: & & 3x & + & 2y & + & kz & = & c. \end{array}$$

Mostre que a interseção destes três planos sempre é um ponto, independentemente dos valores de a, b, c e k.

Resposta:

a) O plano τ deve conter o ponto $(1,0,0)$ e reta r obtida como interseção dos planos π e π'. Escalonando o sistema

$$x + 3y - z = -1, \quad 2x + y - z = 1,$$

obtemos

$$x + 3y - z = -1, \quad -5\,y + z = 3.$$

Fazendo $y = t$ temos

$$z = 3 + 5\,t$$

e

$$x = -1 - 3\,t + 3 + 5\,t = 2 + 2\,t.$$

Logo a equação paramétrica de r é

$$x = 2 + 2\,t, \quad y = t, \quad z = 3 + 5\,t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Portanto o plano contém os pontos $A = (2,0,3)$ e $B = (1,0,0)$ e seu vetor normal é

$$\overline{BA} \times (2,1,5) = (1,0,3) \times (2,1,5) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-3,1,1).$$

Portanto o plano τ é da forma

$$3\,x - y - z = d,$$

e como $(1,0,0)$ pertence a τ temos

$$3\,x - y - z = 3.$$

b) Escalonaremos, substituindo a segunda equação pela segunda menos $2\times$-primeira, e a terceira equação pela terceira menos $3\times$primeira:

$$\begin{array}{rcrcrcc} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ 0x & + & 0y & - & 5z & = & b-2a \\ 0x & - & 4y & + & (k-9)z & = & c-3a \end{array}$$

Trocando a ordem da segunda e da terceira equação

$$\begin{array}{rcrcrcc} x & + & 2y & + & 3z & = & a \\ 0x & - & 4y & + & (k-9)z & = & c-3a \\ 0x & + & 0y & - & 5z & = & b-2a \end{array}$$

temos um sistema escalonado, com solução única, independentemente dos valores de a, b, c e k,

$$\begin{aligned} z &= \frac{2a-b}{5}, \\ y &= \frac{3a-c+(k-9)\frac{2a-b}{5}}{4} \\ x &= a-2\,\frac{3a-c+(k-9)\frac{2a-b}{5}}{4}-3\,\frac{2a-b}{5}. \end{aligned}$$

Outra possibilidade de resolução é ver que o determinante cujas linhas são os vetores normais dos planos π_1, π_2, π_3 é não nulo:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & k \end{array}\right| = 3\,(2-12)-2\,(1-6)+k\,(4-4) = -30+10 = 20 \neq 0.$$

Nesse caso o sistema possui solução única.