P1 de Álgebra Linear I – 2011.2

Gabarito

---

1)

a) Considere o vetor $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$. Determine se existe um vetor $\overrightarrow{n}$ tal que

$$\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathbf{k}} = (0, 0, 1).$$

Caso o vetor $\overrightarrow{n}$ exista escreva suas coordenadas explicitamente.

b) Considere vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$ que verificam as seguintes propriedades:

$$||\overrightarrow{w}|| = 1, \quad ||\overrightarrow{v}|| = 4, \quad \text{e} \quad \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

Determine $||\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}||$.

c) Considere vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{c}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que $||\overrightarrow{a}|| = 4$ e

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) = 0.$$

Calcule $||\overrightarrow{c}||$.

Resposta:

(a) Não existe o vetor $\overrightarrow{n}$ com a propriedade $\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$. Observe que nesse caso, independentemente da escolha do vetor $\overrightarrow{n}$, o vetor $\overrightarrow{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$ deveria ser ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$. Mas isto é impossível pois

$$(1, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1 \neq 0.$$

(b) Temos que

$$0 = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{w}|| \, ||\overrightarrow{v}|| \cos\varphi = 4 \cos\varphi,$$

onde φ é o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u}$. Portanto, $\cos\varphi = 0$ e temos que $\varphi = \pi/2$ ou $\varphi = 3\,\pi/2$. Em qualquer caso, $|\operatorname{sen}|\varphi = 1$.

Por outra parte temos que

$$||\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{w}||\,||\overrightarrow{v}||\,|\operatorname{sen}\varphi| = (4)\,(1) = 4.$$

(c) Observamos que

$$\begin{aligned} 0 &= (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) \cdot (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} = \\ &= \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{c} = ||\overrightarrow{a}||^2 - ||\overrightarrow{c}||^2. \end{aligned}$$

Logo

$$4 = ||\overrightarrow{a}|| = ||\overrightarrow{c}||.$$

---

2) Considere as retas r_1 e r_2 cujas equações paramétricas são

$$r_1 = (1+t, -1, t),\ t \in \mathbb{R} \qquad r_2 = (2+t, 0, 2+t),\ t \in \mathbb{R}.$$

a) Determine a equação cartesiana do plano π que contém as retas r_1 e r_2.

b) Determine a distância entre as retas r_1 e r_2.

c) Determine um ponto Q do plano π calculado no item (a) que seja equidistante das retas r_1 e r_2 (isto é, a distância entre r_1 e Q e entre r_2 e Q são iguais). Verifique a propriedade de equidistância.

Resposta:

(a) O vetor diretor $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$ das retas r_1 e r_2 é um vetor paralelo ao plano π. Considere os pontos

$$A = (1, -1, 0) \in r_1 \quad \text{e} \quad B = (2, 0, 2) \in r_2.$$

Então o vetor $\overrightarrow{AB} = (1,1,2)$ é também paralelo ao plano π. Como os vetores $(1,0,1)$ e $(1,1,2)$ não são paralelos, o vetor $(1,1,2)\times(1,0,1) = (a,b,c)$ é um vetor normal do plano π. Temos

$$(a,b,c) = (1,1,2)\times(1,0,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,-1).$$

Portanto, a equação cartesiana do plano π é da forma $x+y-z=d$. Como o ponto A pertence a π temos $1-1-0=d=0$. Logo

$$\pi\colon x+y-z=0.$$

(b) As retas r_1 e r_2 são paralelas, portanto a distância δ entre elas é

$$\delta = \frac{||\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{v}||}{||\overrightarrow{v}||} = \frac{||(1,1,-1)||}{||(1,0,1||} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

(c) Um ponto Q no plano π que seja equidistante das retas r_1 e r_2 pode ser obtido como segue.

1. Determinaremos a reta r_3 contida no plano π que contém o ponto A.
2. Calcularemos o ponto C de interseção das retas r_3 e r_2.
3. O ponto médio Q do segmento AC verifica a propriedade de equidistância.

Passamos a calcular os itens (1)-(3) acima. O vetor diretor $\overrightarrow{m}$ da reta r_3 deve ser ortogonal ao vetor diretor da reta r_1, o vetor $(1,0,1)$, e ao vetor normal do plano π, o vetor $(1,1,-1)$. Portanto, podemos escolher

$$\overrightarrow{m} = (1,1,-1)\times(1,0,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-2,-1).$$

Portanto a reta r_3 é da forma

$$r_3 = (1+s, -1-2\,s, -s), \quad s\in\mathbb{R}.$$

Para determinar o ponto de interseção C das retas r_2 e r_3 resolvemos o sistema
$$1+s=2+t \qquad -1-2\,s=0, \qquad -s=2+t.$$
Logo $s=-1/2$ e $t=-3/2$. Portanto,
$$C=(1/2,0,1/2).$$
O ponto médio $Q=(q_1,q_2,q_3)$ do segmento AC verifica
$$Q=\frac{A+C}{2},$$
isto é,
$$(q_1,q_2,q_3)=\left(\frac{1+1/2}{2},\frac{-1+0}{2},\frac{0+1/2}{2}\right)=(3/4,-2/4,1/4).$$

Para verificar a condição de equidistância observe que, por construção, o segmento QC é perpendicular à reta r_2. Portanto, a distância entre Q e r_2 é exatamente o comprimento do segmento QC. Analogamente, temos que a distância entre Q e r_1 é o comprimento do segmento QA. Calcularemos os comprimentos destes segmentos.
$$||\overrightarrow{QC}||=||(-1/4,2/4,1/4)||=\frac{1}{4}\,||(-1,2,1)||=\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\,\delta.$$
Analogamente,
$$||\overrightarrow{QA}||=||(1/4,-2/4,-1/4)||=\frac{1}{4}\,||(1-,2,-1)||=\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\,\delta.$$
Verificamos assim a condição de equidistância.

Como comentário final, observe que qualquer ponto da reta r_4 que contém o ponto Q e é paralelo às retas r_1 e r_2 verifica a condição de equidistância. Observe que
$$r_4=(3/4+t,-2/4,1/4+t).$$

---

3) Considere os pontos
$$A=(1,1,2), \quad B=(2,0,1), \quad C=(1,1,0).$$

a) Determine a área do triângulo cujos vértices são A, B e C.

b) Determine a equação cartesiana do plano ϱ que contém os pontos A, B e C.

c) Determine um ponto D do plano ϱ do item anterior tal que A, B e D sejam os vértices de um triângulo retângulo isósceles Δ cujos catetos sejam os segmentos AB e AD (isósceles significa que os segmentos AB e AD têm o mesmo comprimento).

Resposta:

(a) Observe que

$$\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1), \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CB} = (1, -1, 1).$$

A área Δ do triângulo ABC verifica

$$2\,\Delta = ||\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CB}|| = ||(1, -1, -1) \times (1, -1, 1)|| = \left\|\left| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right|\right\| =$$

$$= ||(-2, -2, 0)|| = |2|\sqrt{2}.$$

Portanto,

$$\Delta = \text{área do triângulo } ABC = \sqrt{2}.$$

(b) Um vetor normal do plano ϱ que contém os pontos A, B e C é

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CB} = (-2, -2, 0)$$

(este produto já foi calculado). Logo a equação cartesiana de ϱ é da forma

$$x + y = d.$$

Como $A \in \varrho$ temos $1 + 1 = d$. Logo

$$\varrho \colon x + y = 2.$$

(c) O vetor $\overrightarrow{AD}$ deve ser perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AB}$ (o triângulo é retângulo) e $(1,1,0)$ (o triângulo está contido no plano ϱ). Logo $\overrightarrow{AD}$ é paralelo ao vetor

$$\overrightarrow{AB} \times (1,1,0) = (1,-1,-1) \times (1,1,0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,2).$$

Logo

$$\overrightarrow{AD} = t\,(1,-1,2).$$

Como o triângulo é isóscesles $||\overrightarrow{AD}|| = ||\overrightarrow{AB}||$. Potanto t deve verificar

$$|t|\,||(1,-1,2)|| = ||(1,-1,-1)||, \qquad |t|\,\sqrt{6} = \sqrt{3}.$$

Logo

$$t = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Portanto

$$D = A \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-1,2) = (1,1,2) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-1,2),$$

$$D = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 2+\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ou} \quad D = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 2-\frac{2}{\sqrt{2}}\right).$$

---

4) Considere o sistema

$$\begin{aligned} x + 2\,y + z &= b_1, \\ x - 2\,y - 3\,z &= b_2, \\ x + y + a\,z &= b_3. \end{aligned}$$

a) Determine as condições sobre a, b_1, b_2 e b_3 para que o sistema tenha solução única.

b) Determine as condições sobre a, b_1, b_2 e b_3 para que o sistema não tenha solução.

c) Determine as condições sobre a, b_1, b_2 e b_3 para que as soluções do sistema sejam da forma $(1+t, 2-t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Resposta: Em primeiro lugar, escalonamos o sistema linear:

$$\begin{aligned} x + 2\,y + z &= b_1, \\ x - 2\,y - 3\,z &= b_2, \\ x + y + a\,z &= b_3, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2\,y + z &= b_1, \\ -4\,y - 4\,z &= b_2 - b_1, \\ -y + (a-1)\,z &= b_3 - b_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2\,y + z &= b_1, \\ y + z &= (b_1 - b_2)/4, \\ -y + (a-1)\,z &= b_3 - b_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2\,y + z &= b_1, \\ y + z &= (b_1 - b_2)/4, \\ a\,z &= b_3 - b_1 + (b_1 - b_2)/4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2\,y + z &= b_1, \\ y + z &= (b_1 - b_2)/4, \\ 4\,a\,z &= -3\,b_1 - b_2 + 4\,b_3. \end{aligned}$$

(a) Para que o sistema tenha solução única é necessário e suficiente que $a \neq 0$, não havendo restrições para os valores de b_1, b_2 e b_3.

(b) Para que o sistema não tenha solução devemos ter

$$a = 0 \quad \text{e} \quad -3\,b_1 - b_2 + 4\,b_3 \neq 0.$$

(c) Interprete as equações lineares como equações cartesianas de três planos e $(1+t, 2-t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$, como uma reta. Observe que o vetor diretor da reta, o vetor $(1, -1, 1)$, deve ser ortogonal aos vetores normais dos planos (nos dois primeiros planos esta condição é satisfeita). Isto implica que

$$0 = (1, -1, 1) \cdot (1, 1, a) = 1 - 1 + a, \quad a = 0.$$

Observe que este dado já era conhecido: o sistema não tem solução única e pelo primeiro item $a = 0$.

Além da condição anterior, o ponto $(1,2,1)$ deve verificar as equações, ou seja

$$\begin{aligned} x+2\,y+z &= b_1, & 1+2\,(2)+1 &= 6 = b_1,\\ x-2\,y-3\,z &= b_2,, & 1-2\,(2)-3\,(1) &= -6 = b_2,\\ x+y+0\,z &= b_3, & 1+2+0\,z &= 3 = b_3. \end{aligned}$$

Logo

$$a=0, \quad b_1=6, \quad b_2=-6, \quad b_3=3.$$