# P1 de Álgebra Linear I – 2011.1

**2 de Abril de 2011.**

## Gabarito

---

**1)**

**a)** Considere os vetores

$$\overrightarrow{v}_1 = (1, -2, 2) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v}_2 = (1, 0, 1).$$

Determine vetores $\overrightarrow{w}_1$ e $\overrightarrow{w}_2$ que satisfaçam simultaneamente as seguintes três propriedades:

- $\overrightarrow{w}_1$ é paralelo a $\overrightarrow{v}_1$,
- $\overrightarrow{w}_2$ é ortogonal a $\overrightarrow{v}_1$,
- $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_2$.

**b)** Considere vetores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que seus módulos verificam

$$||\overrightarrow{w}|| = 1, \quad ||\overrightarrow{v}|| = 4, \quad \text{e} \quad ||\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}|| = 4.$$

Calcule o produto escalar $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}$.

**c)** Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{v}_3 = (1, 2, 0) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{v}_4 = (0, 2, 1).$$

Determine, se possível, um vetor $\overrightarrow{w}$ tal que

$$\overrightarrow{v}_3 \times \overrightarrow{w} = (2, -1, 1) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{v}_4 \times \overrightarrow{w} = (-1, 1, -2).$$

---

**Resposta:**

**(a)** O vetor $\overrightarrow{w}_1$ é a projeção ortogonal de $\overrightarrow{v}_2$ no vetor $\overrightarrow{v}_1$ (veja a figura):

$$\overrightarrow{w}_1 = \frac{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2}{\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1}\,\overrightarrow{v}_1 = \frac{(1,-2,2)\cdot \overrightarrow{(}1,0,1)}{(1,-2,2)\cdot \overrightarrow{(}1,-2,2)}\,(1,-2,2) = \frac{3}{9}\,(1,-2,2).$$

Portanto,

$$\overrightarrow{w}_1 = \big(1/3, -2/3, 2/3\big).$$

Finalmente,

$$\overrightarrow{w}_2 = \overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{w}_1 = (1,0,1) - (1/3,-2/3,2/3\big) = (2/3, 2/3, 1/3\big).$$

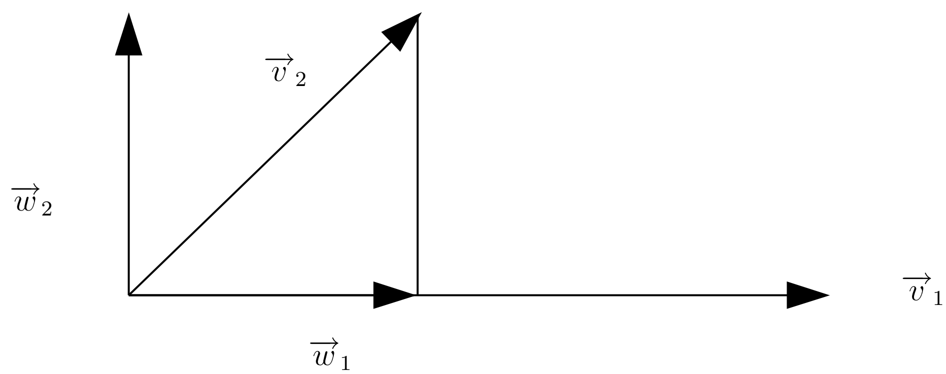


Figura 1: Os vetores $\bar{w}_1$ e $\bar{w}_2$

**(b)** Observe que se $\theta$ é o ângulo formado pelos vetorer $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v}$ temos

$$4 = |\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}| = |\overrightarrow{w}|\,|\overrightarrow{v}|\,|\sin\theta| = 4\,|\sin\theta|.$$

Logo $\sin\theta = \pm 1$ e $\cos\theta = 0$. Portanto,

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{w}|\,|\overrightarrow{v}|\,\cos\theta = 0.$$

**(c)** O vetor $\overrightarrow{w}$ é simultaneamente ortogonal aos vetores $(2,-1,1)$ e $(-1,1,-2)$. Portanto, $\overrightarrow{w}$ é paralelo ao vetor

$$(2,-1,1)\times(-1,1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (1,3,1).$$

Logo $\overrightarrow{w}$ é da forma

$$\overrightarrow{w} = t\,(1,3,1).$$

Devemos determinar o valor de $t$. Sabemos que por hipótese se verifica

$$(2,-1,1) = (1,2,0) \times t\,(1,3,1) = t \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = t\,(2,-1,1).$$

Logo $t = 1$. Devemos ver se esta condição é compatível com $\overrightarrow{v}_4 \times \overrightarrow{w} = (-1,1,-2)$. Verificamos:

$$(0,2,1) \times (1,3,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1,1,-2).$$

Portanto,

$$\overrightarrow{w} = (1,3,1).$$

---

**2)**

**a)** Considere os pontos $A = (3,1,1)$, $B = (2,1,2)$ e a reta $r$ de equações paramétricas

$$r\colon (0,3,2) + t\,(1,0,-1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para cada ponto $C$ da reta $r$ calcule a área de triângulo de vértices $A, B$ e $C$.

**b)** Considere o plano $\pi$ de equação cartesiana

$$\pi\colon y = 1$$

e os pontos $A' = (1,1,2)$ e $B' = (2,1,1)$ de $\pi$.

Determine um ponto $C'$ do plano $\pi$ tal que $A', B', C'$ sejam os vértices de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos são $A'B'$ e $A'C'$ (observe que $|A'B'| = |A'C'|$).

---

**Resposta:**

**(a)** Dado o ponto $C(t) = (t, 3, 2-t)$ da reta consideramos os vetores

$$\overline{AC(t)} = (t-3, 2, 1-t), \qquad \overline{BA} = (1, 0, -1).$$

Sabemos que a área $\Delta(t)$ do triângulo de vértices $A$, $B$ e $C(t)$ é

$$\Delta(t) = \frac{1}{2}\, ||\overline{AC(t)} \times \overline{BA}||.$$

Calculamos o produto vetorial $\overline{AC(t)} \times \overline{BA}$:

$$\overline{AC(t)} \times \overline{BA} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t-3 & 2 & 1-t \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2, -(-t+3-1+t), -2) = (-2, -2, -2).$$

O módulo deste vetor é $\sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Portanto, $\Delta(t) = \sqrt{3}$. De fato, esta área não depende do ponto $C(t)$ da reta considerado.

**(b)** O vetor $\overrightarrow{A'C'}$ é perpendicular a $\overrightarrow{A'B'} = (1, 0, -1)$ (os catetos são perpendiculares) e ao vetor normal do plano $\pi$, $\overrightarrow{n} = (0, 1, 0)$, pois o segmento $A'C'$ está contido no plano. Portanto, o vetor $\overrightarrow{A'C'}$ é paralelo a $(1, 0, -1) \times (0, 1, 0)$.

$$(1, 0, -1) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 0, 1).$$

Logo $\overrightarrow{A'C'} = t\,(1, 0, 1)$.

Como o triângulo é isósceles $||\overrightarrow{A'C'}|| = ||\overrightarrow{A'B'}||$,

$$||\overrightarrow{A'C'}|| = |t|\; ||(1, 0, 1)|| = |t|\,\sqrt{2} = ||\overrightarrow{A'B'}|| = ||(1, 0, -1)|| = \sqrt{2}.$$

Portanto, temos $t = \pm 1$ e

$$C' = A' \pm (1, 0, 1) = (1, 1, 2) \pm (1, 0, 1).$$

Assim existem duas possibilidades:

$$C' = (2, 1, 3) \text{ (se } t = 1), \qquad C' = (0, 1, 1) \text{ (se } t = -1).$$

**3)** Considere a reta $r_1$ de equações paramétricas

$$r_1\colon (2\,t, 1+t, -1-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e a reta $r_2$ de equações cartesianas

$$x + 2y - 2z = 1, \quad x - y = 2.$$

**a)** Escreva a reta $r_1$ como interseção de dois planos $\pi$ e $\rho$ (escritos em equações cartesianas) tais que $\pi$ seja paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e $\rho$ seja paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$.

**b)** Determine uma equação paramétrica da reta $r_2$.

**c)** Considere o ponto $P = (0, 1, -1)$ da reta $r_1$. Encontre **<u>todos</u>** os pontos $Q$ da reta $r_1$ tal que a distância entre $P$ e $Q$ seja $2\sqrt{6}$ (isto é, de forma que o comprimento do segmento $PQ$ seja $2\sqrt{6}$).

---

**Resposta:**

**(a)** O plano $\pi$ é paralelo ao vetor diretor da reta, $(2, 1, -1)$, e ao vetor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$. Logo seu vetor normal $\overrightarrow{n}$ é paralelo a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, -1).$$

Portanto, a equação cartesiana do plano $\pi$ é da forma

$$y + z = d.$$

Como o ponto $(0, 1, -1)$ pertence ao plano $\pi$, $d = 0$. Logo

$$\pi\colon y + z = 0.$$

Analogamente, o plano $\rho$ é paralelo ao vetor diretor da reta, $(2, 1, -1)$, e ao vetor $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Logo seu vetor normal $\overrightarrow{m}$ é paralelo a

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 0).$$

Portanto, a equação cartesiana do plano $\rho$ é da forma

$$x - 2\,y = e.$$

Como o ponto $(0, 1, -1)$ pertende ao plano, $e = -2$. Logo

$$\rho\colon\, x - 2\,y = -2.$$

**(b)** Escolhemos $y$ como parâmetro, $y = t$, e temos $x = 2 + t$. Portanto

$$2\,z = -1 + x + 2\,y = -1 + 2 + t + 2\,t = 1 + 3\,t, \quad z = 1/2 + 3\,t/2.$$

Portanto,

$$\big(2 + t, t, 1/2 + 3\,t/2\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

**(d)** Dado um ponto $Q = (2\,t, 1 + t, -1 - t)$ da reta $r_1$ temos

$$\overline{PQ} = (2\,t, t, -t).$$

Este vetor tem módulo

$$|t|\,\sqrt{6}.$$

Queremos que $|t|\,\sqrt{6} = 2\,\sqrt{6}$. Logo $|t| = 2$ e portanto $t = \pm 2$. Existem duas soluções:

$$Q = (4, 3, -3),\ (t = 2), \qquad Q = (-4, -1, 1),\ (t = -2).$$

---

**4)** Considere o sistema de equações linerares

$$\begin{aligned} x + y + 2\,z &= 1, \\ 2\,x + y + 0\,z &= b, \\ x + 2\,y + a\,z &= 3. \end{aligned}$$

**a)** Determine, se possível, $a$ e $b$ para que o sistema não tenha solução.

**b)** Determine, se possível, $a$ e $b$ para que o sistema tenha solução única.

**c)** Determine, se possível, $a$ e $b$ para que o sistema tenha infinitas soluções.

---

**Resposta:** Para resolver a questão escalonamos o sistema.

$$\begin{aligned} x + y + 2\,z =& 1, \\ 2\,x + y + 0\,z =& b, \\ x + 2\,y + a\,z =& 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2\,z =& 1, \\ -y - 4\,z =& b - 2, \quad \text{(II)-2 (I)} \\ y + (a-2)\,z =& 2 \quad \text{(III)-(I)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2\,z =& 1, \\ -y - 4\,z =& b - 2, \\ (a-6)\,z =& b \quad \text{(III)+(II)}. \end{aligned}$$

Portanto,

- Sistema sem solução: $a = 6$ e $b \neq 0$.
- Sistema com solução única: $a \neq 6$ e $b \in \mathbb{R}$ ($b$ qualquer valor).
- Sistema com infinitas soluções: $a = 6$ e $b = 0$.