P1 de Álgebra Linear I – 2010.1

29 de abril de 2010.

Gabarito

Questão 1)

Considere o sistema linear 3 x 3:

$$\begin{cases} 3333x + 3333y + 3333z = a \\ 6666x + 6667y + 6668z = b \\ 9999x + 10.000y + 10.002z = c, \end{cases}$$

onde a, b e c são constantes.

a) Determine **todos** os valores de a, b e c de forma que o sistema tenha uma *única* solução.

b) Ache tal solução referida no item (a), em função de a, b e c.

Resolução:

(a)

Escalonando o sistema, fazemos as seguintes operações sobre as linhas: $L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$ e $L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1$ obtendo:

$$\begin{cases} 3333x + 3333y + 3333z = a \\ \\ y + 2z = b - 2a \\ \\ y + 3z = c - 3a. \end{cases}$$

Agora, fazemos $L_3 \to L_3 - L_2$ e $L_1 \to (1/3333)L_1$ finalmente e obtemos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + y + z = a/3333 \\ \\ y + 2z = b - 2a \\ \\ z = c - b - a. \end{cases}$$

Assim, para quaisquer a,b e c, o valor de z está univocamente determinado, $z = c - b - a$. Portanto, substituindo este valor de z na 2a. eq., y fica univocamente determinado, e substituido os valores correspondentes de y e z na 1a. eq., x fica univocamente determinado. Logo, os sistema tem uma única solução quaiquer que sejam a, b e c.

(b)

Fazendo as substituições indicadas acima, obtemos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3334}{3333}a - 2b + c \\ \\ y = 3b - 2c \\ \\ z = c - b - a. \end{cases}$$

Questão 2)

Considere o plano π cuja equação cartesiana é

$$\pi : x + y - 2z = 1.$$

a) Ache a equação vetorial da reta r que é ortogonal a π e passa pelo ponto

$P = (1, 0, 1)$.

b) Encontre o ponto Q que pertence a π e está o mais próximo possível do ponto P. Ache a distância d de P a Q.

c) Ache a equação cartesiana do plano ρ tal que: é ortogonal ao plano π, contém a reta r e contém a reta s que passa pelo ponto Q e tem vetor diretor $(2, 0, 1)$.

d) Ache explicitamente todos os pontos R da reta s tais que a área do triângulo PQR seja igual a $\sqrt{30}/6$

Solução

(a) O vetor $\overrightarrow{u} = (1, 1, -2)$, normal ao plano π ,é vetor diretor da reta r; como $P \in \pi$, temos:

$$r: \quad X(t) = (1, 0, 1) + t(1, 1, -2) = (1 + t, t, 1 - 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Q é a interseção da reta r com o plano π. Basta então achar o valor de t tal que $X(t)$ satisfaça a eq. de π. Temos:

$$1 = (1 + t) + t - 2(1 - 2t) = 6t - 1 \Longrightarrow t = 1/3.$$

Logo $Q = X(1/3) = (4/3, 1/3, 1/3)$. Então a distância procurada é

$$d = |||\overrightarrow{QP}|| = ||(-1/3, -1/3, 2/3)|| = \sqrt{6}/3.$$

(c) Um vetor normal ao plano ρ é dado por $(1, 1, -2) \times (2, 0, 1) = (1, -5, -2)$. Logo a eq. cartesiana de ρ é da forma $x - 5y - 2z = c$. Para achar c, basta notar que, por exemplo, $P \in \rho$, donde $c = 1 + 5.0 - 2 = -1$. Finalmente,

$$\rho: \; x - 5y - 2z = -1.$$

(d) A área dp triângulo PQR é dada por

$$A = \frac{1}{2}|||\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP}|||,$$

onde $R(t) = Q + t(2, 0, 1)$. Assim, como $\overrightarrow{QR} = t(2, 0, 1)$ e
$\overrightarrow{QP} = (-1/3, -1/3, 2/3)$, temos:

$$\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP} = \frac{t}{3}(1, -5, -2) \Rightarrow \frac{1}{2}|||\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QP}||| = \frac{\sqrt{30}}{6}|t|.$$

Como queremos $A = \sqrt{30}/6$, que $|t| = 1 \Rightarrow t = \pm 1$. Assim, os pontos procurados são

$$(10/3, 1/3, 4/3) \text{ e } (-2/3, 1/3, -2/3).$$

Questão 3)

Decida se as afirmações a seguir são Verdadeiras ou Falsas (Justificando!)

a) Para quaisquer vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^3$ temos que $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2$.

b) Todo sistema linear com duas equações e tres incógnitas tem pelo menos uma solução.

c) Para quaisquer vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ em $\mathbb{R}^3$ temos que $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c}$.

Solução

a) VERDADEIRA: basta efetuar o produto:

$$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||^2 + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} - ||\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2.$$

b) FALSA: Por exemplo, o sistema 2 x 3:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2, \end{cases}$$

não tem solução.

c) FALSA: Por exemplo,

$$\hat{\mathbf{j}} \times (\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}) = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}},$$

porém

$$(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}) \times \hat{\mathbf{i}} = \overrightarrow{0} \times \hat{\mathbf{i}} = \overrightarrow{0}.$$