P1 de Álgebra Linear I – 2009.2

10 de setembro de 2009.

Gabarito

---

1) Considere o sistema linear 3 x 3:

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x-y+3z=2 \\ 5x-y+az=6, \end{cases}$$

onde a é uma certa constante. Determine **todos** os valores de a afim de que o sistema tenha uma *única* solução e ache tal solução.

Resposta:

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x-y+3z=2 \\ 5x-y+az=6, \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x+y+2z=2 \\ 3y+z=2 \\ 6y+(10-a)z=4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 3y+z=2 \\ (8-a)z=0. \end{cases}$$

Agora, se $a=8$, o sistema se reduz a

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 3y+z=2, \end{cases}$$

e portanto $z=2-3y$ e $x=-2-5y$, i.e., o sistema tem infinitas soluções: $(-2-5t, t, 2-3t), \quad t\in\mathbb{R}$.

Por outro lado, se $a \neq 8$, então $z = 0$, $y = 2/3$ e $x = 4/3$. Ou seja o sistema tem solução única para todo $a \neq 8$, sendo a solução $(4/3, 2/3, 0)$, independente de a.

---

2) Considere tres vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ em $\mathbb{R}^3$. Responda os items abaixo (os itens são independentes):

a) Decida se a afirmação seguinte é Verdadeira ou Falsa: Se $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}$.

b) Suponha que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não são paralelos e que $\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{v}$. Se $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ e $\|\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}\| = 2$, ache $\|\overrightarrow{w}\|$.

Resposta:
a) Se $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, então,

$$\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

i.e., uma vez que vale a distributividade,

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}.$$

Como $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, obtemos, usando a anti-comutatividade:

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}.$$

Analogamente, multiplicando inicialmente por $\overrightarrow{v}$, se obtem as outras igualdades. Portanto, a afirmação é **Verdadeira**.

b) Temos, lembrando que $\overrightarrow{v}$ é ortogonal a $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$, que:

$$\begin{aligned}
&\|\overrightarrow{w}\|^2 = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w} = [(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{v}] \cdot [(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{v}] = \\
&= (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})^2 - 2\overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v}^2 = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 = 4 + 1 = 5.
\end{aligned}$$

Logo, $\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{5}$.

3) Considere tres retas r_1, r_2 e r_3 em $\mathbb{R}^3$ cujas equações vetoriais são:

$$r_1\colon X_1(t) = (1-t, 2t, 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$r_2\colon X_2(t) = (t, 0, 1-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$r_3\colon X_3(t) = (0, 2-2t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Decida se a afirmação seguinte é Verdadeira ou Falsa: As três retas dadas estão em um mesmo plano de $\mathbb{R}^3$.

b) Ache a equação cartesiana do plano mencionado no item anterior.

c) Ache a área do triângulo cujos vértices são as interseções das retas dadas.

Resposta:

a) As retas se interceptam duas a duas. Achar $r_1 \cap r_2$, corresponde a resolver $X_1(t) = X_2(s)$, ou seja:

$$\begin{cases} 1-t = s \\ 2t = 0 \\ 0 = 1-s, \end{cases}$$

q/ dá $s = 1$ e $t = 0$, i.e., o ponto $A = (1, 0, 0)$.

Achar $r_1 \cap r_3$ corresponde a resolver $X_1(t) = X_3(s)$, ou seja:

$$\begin{cases} 1-t = 0 \\ 2t = 2-2s \\ 0 = s, \end{cases}$$

q/ dá $t = 1$, $s = 0$, i.e. $B = (0, 2, 0)$.

Achar $r_2 \cap r_3$ corresponde a resolver $X_2(t) = X_3(s)$, ou seja:

$$\begin{cases} t = 0 \\ 0 = 2-2s \\ 1-t = s, \end{cases}$$

q/ dá $t=0$, $s=1$, i.e. $C=(0,0,1)$.

Como os pontos A, B e C não são colineares (pertencem, respectivamente ao eixo $0x$, $0y$ e $0z$), eles geram um plano, ao qual as retas necessáriamente pertencem.

Logo, a afirmação é **Verdadeira**.

b) Um vetor normal ao plano é dado por

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}}\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=(-2,-1,-2).$$

Logo, o plano tem eq. cartesiana $2x+y+2z=d$, e como $(1,0,0)$ pertence ao plano, segue que $d=2$. Em suma, a eq. cartesiana do plano é:

$$\pi\colon 2x+y+2z=2.$$

c) Os vértices do triângulo são $A=(1,0,0)$, $B=(0,0,1)$ e $C=(0,2,0)$. A área buscada é dada por $S=(1/2)\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$, onde:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{\mathbf{i}} & \overrightarrow{\mathbf{j}} & \overrightarrow{\mathbf{k}}\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{vmatrix}=(-2,-1,-2).$$

Logo, $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{9}=\dfrac{3}{2}$.

---

4) Considere o plano ρ cuja equação cartesiana é

$$\rho\colon 2x-\ y+\ z=5.$$

Ache a equação paramétrica da reta r que é ortogonal ao plano ρ e que passa pelo ponto P pertencente ao semi-eixo positivo $0y$. Calcule a distância de P ao ponto Q de interseção de r com ρ.

Resposta:

Como a reta r é ortogonal ao plano ρ, podemos tomar para seu vetor diretor o vetor normal ao plano, $\overrightarrow{n} = (2, -1, 1)$. Assim, a reta tem equação. vetorial da forma:

$$r\colon X(t) = P + t\overrightarrow{n},\ t \in \mathbb{R},$$

e resta determinar P. Como P está no semi-eixo $0y$ positivo, segue que é da forma $P = (0, b, 0)$, para certo $b > 0$, a determinar.

Seja $Q = (\alpha, \beta, \gamma)$ o ponto de interseção de r com ρ; então $\overrightarrow{PQ} = \lambda\overrightarrow{n}$, para certo $\lambda \in \mathbb{R}$. Ou seja

$$(\alpha, \beta - b, \gamma) = \lambda(2, -1, 1) = (2\lambda, -\lambda, \lambda).$$

Por outro lado, $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{6}$, i.e.,

$$\alpha^2 + (\beta - b)^2 + \gamma^2 = (2\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + \lambda^2 = 6\lambda^2 = 6.$$

Daí que $\lambda = \pm 1$. Mas sabemos que $Q = (2\lambda, b - \lambda, \lambda)$ e que $Q \in \rho$. Logo,

$$2(2\lambda) - (b - \lambda) + \lambda = 5 \Rightarrow 6\lambda - b = 5.$$

Se $\lambda = -1$ obteríamos $b = -11$, q/ descartamos pois supomos $b > 0$. Assim, com $\lambda = 1$, obtemos $b = 1$, e daí que $P = (0, 1, 0)$.

Finalmente, a eq. da reta procurada é

$$r\colon X(t) = (0, 1, 0) + t(2, -1, 1) = (2t, 1 - t, t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$