P1 de Álgebra Linear I – 2005.2

8 de setembro de 2005.

Gabarito

---

1)

(a) Considere os planos de equações cartesianas

$$\begin{aligned}\alpha&\colon x-2\,y+z=1,\\ \beta&\colon 2\,x-y+2\,z=2,\\ \gamma&\colon x-5\,y+z=k.\end{aligned}$$

Determine k para que os planos se interceptem ao longo de uma reta.

(b) Considere os planos π e ρ de equações cartesianas

$$\pi\colon 2\,x-y+z=1,\quad \rho\colon x+2\,y+z=2.$$

Determine a equação cartesiana do plano τ que contém o ponto $(1,1,1)$ tal que a interseção dos planos π, ρ e τ seja uma reta r.

(c) Considere os planos π e ρ do item anterior. Estude se existe um plano ν tal que a interseção dos planos π, ρ e ν seja o ponto $(1,1,0)$. Em caso afirmativo determine a equação cartesiana de ν. Em caso negativo, justifique cuidadosamente sua resposta.

Resposta:
1 a) Para que os planos se interceptem ao longo de uma reta o sistema linear dado pelas equações cartesianas dos planos

$$\begin{aligned}x-2\,y+z&=1,\\ 2\,x-y+2\,z&=2,\\ x-5\,y+z&=k\end{aligned}$$

deve ter solução. De fato, como queremos que a interseção seja uma reta a solução não pode ser única. Usaremos o método de escalonamento e escolheremos k para que o sistema nãp tenha solução única:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & z & = & 1, \\ 2\,x & - & y & + & 2\,z & = & 2, \\ x & - & 5\,y & + & z & = & k. \end{array} ; \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & z & = & 1, \\ & + & 3\,y & + & & = & 0, \\ & - & 3\,y & + & & = & k-1. \end{array} .$$

Onde as operações efetuadas são segunda equação menos duas vezes a primeira, e terceira equação menos a primeira. Continuando o escalonamento, terceira equação mais segunda, obtemos

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & z & = & 1, \\ & + & 3\,y & + & & = & 0, \\ & & & + & 0 & = & k-1. \end{array} .$$

Portanto, $k = 1$.

De fato, v. também pode raciocinar como segue. Os dois primeiros planos já se interceptam ao longo de uma reta: reaproveitando o escalonamento já feito,

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2\,y & + & z & = & 1, \\ & + & 3\,y & + & & = & 0, \end{array} .$$

Logo $y = 0$. Portanto, $x = 1 - z$. Escolhendo z como parâmetro temos que a interseção dos planos α e β é a reta r de equação paramétrica:

$$r\colon (1-t, 0, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Logo k deve ser escolhido de forma que o plano γ contenha a reta r:

$$1\,(1-t) - 5\,(0) + 1\,(t) = k, \qquad 1 - t + t = k, \qquad k = 1.$$

1 b) O plano τ deve conter a reta s de interseção dos planos π e ρ e o ponto $P = (1,1,1)$. Portanto, é suficiente determinar o vetor diretor v da reta s e um ponto A da mesma. Assim conhecemos dois vetores paralelos ao plano τ, os vetores v e $\overline{AP}$. Desta forma um vetor normal de τ é

$$n = v \times \overline{AP}.$$

Determinaremos as equações paramétricas de s. Temos que o sistema

$$2\,x - y + z = 1, \qquad x + 2\,y + z = 2$$

é equivalente a

$$x + 2\,y + z = 2, \quad x - 3\,y = -1.$$

Escolhendo y como parâmetro temos

$$x = -1 + 3\,t, \qquad y = t, \qquad z = 1 + y - 2\,x = 1 + t + 2 - 6\,t = 3 - 5\,t.$$

Logo

$$s\colon (-1 + 3\,t, t, 3 - 5\,t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Temos

$$v = (3, 1, -5), \quad A = (-1, 0, 3).$$

Verifique que o ponto pertence aos dois planos e que v é ortogonal aos vetores normais dos planos π e ρ (isto é, os vetores $(2, -1, 1)$ e $(1, 2, 1)$).

Temos

$$\overline{AP} = (2, 1, -2).$$

Logo

$$n = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2 + 5, -(-6 + 10), 3 - 2) = (3, -4, 1).$$

Logo o plano τ é da forma

$$\tau\colon 3\,x - 4\,y + z = d.$$

Determinamos d pela condição $(1, 1, 1) \in \tau$:

$$3 - 4 + 1 = d = 0.$$

Finalmente,

$$\tau\colon 3\,x - 4\,y + z = 0.$$

Verificamos que o plano τ contém a reta $s\colon (-1 + 3\,t, t, 3 - 5\,t)$ interseção de π e ρ:

$$3\,(-1 + 3\,t) - 4\,(t) + 3 - 5\,t = -3 + 9\,t - 4\,t + 3 - 5\,t = 0.$$

1 c) O plano ν não existe. Se o ponto $(1, 1, 0)$ pertencer à interseção dos três planos, ele deve necessariamente pertencer aos dois primeiros planos.

Mas o ponto $(1,1,0)$ não pertence ao plano ρ pois não verifica sua equação cartesiana (embora pertença a π, verifique)

$$1+2+0=3\neq 2.$$

---

2) Considere as retas de equações paramétricas

$$r_1\colon (t,t+1,2t-1), t\in\mathbb{R}, \quad \text{e} \quad r_2\colon (2t+1,t,t), t\in\mathbb{R}.$$

(a) Verifique se as retas se interceptam. Em caso afirmativo determine o ponto de interseção, e em caso negativo a distância entre as duas retas.

(b) Escreva a equação cartesiana do plano π que contém a reta r_2 e é paralelo à reta r_1.

(c) Determine a distância do plano π do item anterior ao ponto $P = (-1,3,0)$.

(d) Considere os pontos

$$A=(0,1,-1) \quad \text{e} \quad B=(1,0,0).$$

Determine um ponto C pertencente à reta r_2 que seja equidistante dos pontos A e B.

(e) Considere agora os planos

$$\alpha\colon x-y+z=0, \quad \text{e} \quad \beta\colon 2x+y-4z=0.$$

Encontre o plano ν perpendicular a α e β e que passa pelo ponto $(4,0,-2)$.

Resposta:
2 a) Para verificar se as retas se interceptam devemos ver se o sistema

$$t=2\,s+1, \quad t+1=s, \quad 2\,t-1=s$$

tem solução. Das duas primeiras equações obtemos (substituindo o valor de t na segunda)

$$2\,s+1+1=s, \quad s=-2, \quad t=-3.$$

Mas este resultado é incompatível com a terceira equação:

$$2\,(-3)-1=-7\neq -2.$$

Logo as retas não se interceptam (como não são paralelas as retas são reversas).

Outra forma de verificar se as retas se interceptam é calcular sua distância d, cálculo que faremos a seguir. Escolhemos um ponto de cada reta, por exemplo $A=(0,1,-1)\in r_1$ e $B=(1,0,0)\in r_2$, e determinamos o vetor $\overline{AB}=(1,-1,1)$. Escolhemos também vetores diretores das retas r_1 e r_2, por exemplo, os vetores $(1,1,2)$ e $(2,1,1)$, respetivamente. Então

$$d=\frac{|(1,-1,1)\cdot[(1,1,2)\times(2,1,1)]|}{|(1,1,2)\times(2,1,1)|}.$$

Temos,

$$(1,1,2)\times(2,1,1)=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1,3,-1).$$

Logo

$$|(1,1,2)\times(2,1,1)|=\sqrt{11}.$$

Por outro lado,

$$(1,-1,1)\cdot(-1,3,-1)=-5.$$

Logo $d=5/\sqrt{11}$.

2 b) Sabemos que o vetor normal n do plano π é o produto vetorial dos vetores diretores das retas r_1 e r_2. Este cálculo já foi feito no item anterior,

$$n=(1,-3,1).$$

Logo o plano π é da forma

$$\pi\colon x-3\,y+z=d.$$

Como a reta r_2 está contida em π temos que o ponto $B=(1,0,0)$ pertence a π. Logo,

$$1-3\,(0)+0=d.$$

Portanto,

$$\pi\colon x - 3\,y + z = 1.$$

2 c) A distância d do plano π ao ponto $P = (-1, 3, 0)$ é obtida como segue: (i) consideramos a reta ℓ que contém o ponto P e é ortogonal a π, (ii) determinamos o ponto de interseção T da reta ℓ e do plano π, (iii) então a distância d é o comprimento do segmento PT.

Temos que o vetor diretor de ℓ é o vetor normal de π. Logo

$$\ell\colon (-1 + t, 3 - 3\,t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para calcular o ponto de interseção de ℓ e π devemos ver para que valor de t um ponto da forma $(-1 + t, 3 - 3\,t, t)$ verifica a equação do plano:

$$(-1 + t) - 3\,(3 - 3\,t) + t = 1, \quad 11\,t = 11, \quad t = 1.$$

Logo

$$T = (0, 0, 1)$$

Finalmente,

$$\overline{PT} = (-1, 3, -1),$$

e seu módulo é $\sqrt{11}$. Logo a distância é $\sqrt{11}$.

2 d) Resolveremos este item de duas formas. O conjunto dos pontos equidistantes dos pontos A e B é o plano η que contém o ponto médio M do segmento AB,

$$M = (1/2, 1/2, -1/2)$$

e é ortogonal ao vetor $\overline{AB} = (1, -1, 1)$. Portanto é um plano da forma

$$\eta\colon x - y + z = d,$$

onde d é obtido pela condição $M \in \eta$:

$$1/2 - 1/2 - 1/2 = d = -1/2.$$

Finalmente, o ponto C é obtido como a interseção do plano η e a reta r_2. Devemos ver para que valor de t o ponto $(2\,t + 1, t, t)$ pertence a η,

$$2\,t + 1 - t + t = -1/2, \quad t = -3/4.$$

Logo

$$C = (-2/4, -3/4, -3/4).$$

Verificamos as distância de C a A e B. Temos

$$\overline{AC} = (-2/4, -7/4, 1/4), \quad \overline{BC} = (-6/4, -3/4, -3/4).$$

Logo

$$\mathrm{dist}(AC) = \frac{\sqrt{4+49+1}}{4} = \frac{\sqrt{54}}{4}, \quad \mathrm{dist}(BC) = \frac{\sqrt{36+9+9}}{4} = \frac{\sqrt{54}}{4}.$$

Outra forma de resolver o exercício é a seguinte. Devemos escolher t de forma que a distância de $(2\,t+1, t, t)$ aos pontos A e B coincidam. Isto é,

$$(2\,t+1)^2 + (t-1)^2 + (t+1)^2 = (2\,t)^2 + (t)^2 + (t)^2.$$

Isto é,

$$4\,t^2 + 4\,t + 1 + t^2 - 2\,t + 1 + t^2 + 2\,t + 1 = 4\,t^2 + t^2 + t^2.$$

Simplificando,

$$4\,t + 3 = 0, \qquad t = -3/4.$$

E obtemos o mesmo resultado que no caso anterior.

2 e) Como o plano ν é ortogonal a α, o vetor normal de α, $n = (1, -1, 1)$ deve ser paralelo a ν. Analogamente, como o plano ν é ortogonal a β, o vetor normal de β, $m = (2, 1, -4)$ deve ser paralelo a ν. Portanto, conhecemos dois vetores paralelos a ν, logo o vetor normal de ν é paralelo ao produto vetorial $(1, -1, 1) \times (2, 1, -4)$:

$$(1, -1, 1) \times (2, 1, -4) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (3, 6, 3).$$

E podemos escolher o vetor $(1, 2, 1)$ como vetor normal do plano. Logo o plano ν é da forma

$$\nu\colon x + 2\,y + z = d.$$

Determinamos d pela condição $(4, 0, -2) \in \nu$,

$$(4) + 2\,(0) + (-2) = d = 2.$$

Logo

$$\nu\colon x + 2\,y + z = 2.$$

---

3) Considere os pontos de $\mathbb{R}^3$

$$P = (1, -2, 3), \quad Q = (4, 3, -1), \quad R = (2, 2, 1), \quad S = (5, 7, -3).$$

(**a**) Mostre que o quadrilátero Σ tendo como vértices os ponts P, Q, R e S é um paralelogramo.

(**b**) Determine a área do paralelogramo Σ.

(**c**) Determine a equação cartesiana do plano π que contém o paralelogramo Σ.

Resposta:
3 a) Em primeiro lugar consideraremos os vetores determinados por estes pontos (eliminamos a orientação):

- $\overline{PQ} = (3, 5, -4)$,
- $\overline{PR} = (1, 4, -2)$,
- $\overline{PS} = (4, 9, -6)$,
- $\overline{QR} = (-2, -1, 2)$,
- $\overline{QS} = (1, 4, -2)$,
- $\overline{RS} = (3, 5, -4)$.

Portanto $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$ são o mesmo vetor. Analogamente, $\overline{PR}$ e $\overline{QS}$ são o mesmo vetor. Logo temos um paralelogramo de lados PQ e RS (paralelos) e PR e QS (paralelos).

3 b) A área do paralelogramo é o módulo do produto vetorial

$$\begin{aligned} \overline{PQ} \times \overline{PR} &= (3, 5, -4) \times (1, 4, -2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= (-10 + 16, 6 - 4, 12 - 5) = (6, 2, 7). \end{aligned}$$

Logo a área de paralelogramo é

$$\sqrt{36 + 4 + 49} = \sqrt{89}.$$

3 c) O vetor normal do plano já foi calculado no item anterior, $(6, 2, 7)$. Portanto,

$$\pi\colon 6\,x + 2\,y + 7\,z = d.$$

Como $P = (1, -2, 3) \in \pi$, temos

$$6 - 4 + 21 = d = 23.$$

Logo

$$\pi\colon 6\,x + 2\,y + 7\,z = 23.$$

Verifique que os outros pontos também verificam esta equação.