P1 de Álgebra Linear I – 2005.1

Data: 29 de março de 2005.

Gabarito P1

---

1) Considere a reta

$$r\colon (1+t, 1-t, 2+t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Determine a equação cartesiana do plano π que contem o ponto $Q = (1, -1, 2)$ e é perpendicular a r.

b) Determine a equação cartesiana do plano τ que contem o ponto Q e a reta r.

c) Determine o ponto M da reta r mais próximo do ponto Q.

d) Calcule a distância d entre a reta r e o ponto Q.

Respostas:

a) O vetor normal n do plano π é o vetor diretor da reta r, ou seja,

$$n = (1, -1, 1).$$

Portanto, a equação cartesiana é da forma

$$\pi\colon x - y + z = d.$$

O valor de d é determinado pela condição $Q = (1, -1, 2) \in \pi$, ou seja,

$$1 - (-1) + (2) = 4.$$

Portanto, a equação cartesiana é:

$$\pi\colon x - y + z = 4.$$

b) Dois vetores paralelos ao plano τ são o vetor diretor da reta r (o vetor $(1,-1,1)$) e o vetor $\overline{PQ}$, onde P é um ponto da reta, por exemplo $P = (1,1,2)$. Portanto,

$$\overline{PQ} = (1-1, -1-1, 2-2) = (0,-2,0).$$

Escolhendo o vetor $(0,1,0)$ paralelo ao vetor $\overline{PQ}$, temos que o vetor normal m do plano τ é o vetor

$$m = (1,-1,1) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,0,1).$$

Portanto, a equação cartesiana de τ é da forma

$$\tau\colon x - z = d.$$

O valor de d é determinado pela condição $Q = (1,-1,2) \in \tau$, ou seja,

$$(1) - (2) = d.$$

Portanto, a equação cartesiana é:

$$\tau\colon x - z = -1.$$

c) O ponto M é obtido como a interseção do plano π do item (a) e a reta r. Portanto, devemos determinar para que valor do parâmetro t o ponto $(1+t, 1-t, 2+t)$ verifica a equação de π, substituindo temos:

$$(1+t) - (1-t) + (2+t) = 4, \quad 3t = 2, \quad t = 2/3.$$

Logo

$$M = (5/3, 1/3, 8/3).$$

Verifique (usando o produto escalar) que o vetor

$$\overline{QM} = (2/3, 4/3, 2/3) = 1/3\,(2,4,2)$$

é ortogonal ao vetor diretor da reta $(1, -1, 1)$.

d) A distância d é o módulo do vetor $\overline{QM} = (2/3, 4/3, 2/3) = 1/3\,(2, 4, 2)$, ou seja

$$d = \frac{1}{3}\sqrt{4+16+4} = \frac{1}{3}\sqrt{24} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}.$$

---

2)

a) Calcule o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 77777 & 77777 & 77777 \\ 77777 & 77778 & 77780 \\ 77777 & 77779 & 77781 \end{vmatrix}$$

b) Determine o volume de um paralelepípedo P que tem como arestas os segmentos AB, AC e AD, onde

$$A = (0, 1, 3), \quad B = (1, 2, 3), \quad C = (1, 3, 4), \quad D = (1, 4, 6).$$

c) Determine a equação cartesiana do plano ρ que contém os pontos A, B e C.

d) Determine a distância d do ponto D ao plano ρ do item anterior.

Res<u>postas:</u>

a) Pelas propriedades dos determinantes temos (restando a primeira linha das outras e pondo em evidência 77777)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 77777 & 77777 & 77777 \\ 77777 & 77778 & 77780 \\ 77777 & 77779 & 77781 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 77777 & 77777 & 77777 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (77777) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, o último determinante é (desenvolvendo pela primeira coluna)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1)\,(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2.$$

Portanto,

$$\Delta = (-2)(77777) = -155554.$$

b) O volume do paralelepípedo é o valor absoluto do produto misto dos vetores $\overline{AB}, \overline{AC}$ e $\overline{AD}$. Temos

$$\overline{AB} = (1,1,0), \quad \overline{AC} = (1,2,1), \quad \overline{AD} = (1,3,3).$$

Portanto, devemos calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (1)\,(6-3) - (1)(3-1) = 3 - 2 = 1.$$

Logo o volume é igual a 1.

c) Observe que o vetores

$$\overline{AB} = (1,1,0) \quad \text{e} \quad \overline{AC} = (1,2,1)$$

são paralelos ao plano ρ. Portanto, u vetor normal n de ρ é

$$n = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,1).$$

Logo, equação cartesiana de ρ é da forma

$$x - y + z = d,$$

onde d é determinado pela condição $A \in \rho$. Portanto,

$$(0) - (1) + 3 = d = 2.$$

Logo,

$$x - y + z = 2.$$

d) A distância d é

$$d = \frac{\text{volume do paralelepípedo } P}{\text{módulo } n} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

---

3) Considere a reta r de equações cartesianas

$$x - y + 2z = 1, \quad x - z = 1,$$

e o plano

$$\alpha\colon x + 2y - z = 6.$$

a) Determine uma equação paramétrica da reta r_2.

b) Determine o ponto de interseção P da reta r e o plano α.

c) Determine um ponto Q da reta r a distância $\sqrt{6}$ do plano α.

Respostas:

a) Da segunda equação obtemos $x = 1 + z$. Substituindo na primeira:

$$(1 + z) - y + 2z = 1, \quad y = 3z.$$

Portanto, escolhendo z como parâmetro temos

$$r\colon (1 + t, 3t, t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Verifique que o ponto $(1, 0, 0)$ verifica as equações cartesianas dos planos que definem r e que o vetor $(1, 3, 1)$ é ortogonal aos vetores normais destes planos (os vetores $(1, -1, 2)$ e $(1, 0, -1)$, use o produto escalar).

b) Para determinar o ponto de interseção temos duas possibilidades: (1) resolver o sistema

$$\begin{aligned} &x - y + 2z = 1, \\ &x - z = 1, \\ &x + 2y - z = 6. \end{aligned}$$

(2) determinar o valor do parâmetro t talque $(1 + t, 3t, t)$ verifica a equação de α. Usaremos o segundo método. Substituindo na equação de α temos

$$(1 + t) + 2(3t) - (t) = 6, \quad 6t = 5, \quad t = 5/6.$$

Logo

$$P = (11/6, 15/6, 5/6).$$

c) O ponto Q é da forma $(1+t, 3t, t)$ (pois pertence à reta r) e deve verificar

$$\sqrt{6} = \frac{|\overline{PQ} \cdot (1, 2, -1)|}{|(1, 2, -1)|} = \frac{|(t - 5/6, 3t - 15/6, t - 5/6) \cdot (1, 2, -1)|}{\sqrt{6}}.$$

Ou seja,

$$\pm 6 = t - 5/6 + 6t - 30/6 - t + 5/6 = 6t - 30/6.$$

Portanto,

$$t = \frac{\pm 36 + 30}{36}, \quad t = -1/6, \quad t = 66/36 = 11/6.$$

Obtemos

$$Q = (5/6, -3/6, -1/6), \quad Q = (17/6, 33/6, 11/6).$$