P1 de Álgebra Linear I – 2004.2

Gabarito

prova modelo

---

1) Considere os vetores $\bar{v} = (1, 0, 1)$ e $\bar{w} = (1, 1, -1)$.

a) Determine um vetor $\bar{a}$ de módulo igual a $\sqrt{6}$ tal que $\bar{a} \times \bar{v} = \bar{w}$.

b) Determine o valor de c para que se verifique a igualdade

$$(1, c, 2) \cdot ((1, 0, 1) \times (1, 1, -1)) = 5.$$

c) Determine o valor de d para que se verifique a igualdade

$$(1, d, 2)\cdot((1, 0, 1)\times(1, 1, -1)) = (1, d, 2)\cdot((1, 1, -1)\times(1, 0, 1)).$$

Respostas: Escreva $\bar{a} = (x, y, z)$. Temos

$$\bar{a} \times \bar{v} = (x, y, z) \times (1, 0, 1) = (y, -x + z, -y) = (1, 1, -1).$$

Portanto, obtemos o sistema

$$y = 1, \quad -x + z = 1, \quad -y = -1.$$

Portanto, o vetor $\bar{a}$ é da forma $\bar{a} = (t, 1, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Como queremos que tenha módulo $\sqrt{6}$:

$$t^2 + 1 + t^2 + 1 + 2t = 2t^2 + 2 + 2t = 6, \qquad t^2 + t - 2 = 0.$$

Portanto,

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}, \qquad t = 1 \quad \text{ou} \quad t = -2.$$

Logo

$$\bar{a} = (-2, 1, -1) \qquad \text{ou} \qquad \bar{a} = (1, 1, 2).$$

Observe que

$$\bar{v} \times \bar{w} = (-1, 2, 1).$$

Portanto,

$$(1, c, 2) \cdot ((1, 0, 1) \times (1, 1, -1)) = (1, c, 2) \cdot (-1, 2, 1) = 5,$$

isto é

$$-1 + 2c + 2 = 5, \qquad c = 2.$$

Das propriedades do producto misto temos:

$$(1, d, 2) \cdot ((1, 0, 1) \times (1, 1, -1)) = -(1, d, 2) \cdot ((1, 1, -1) \times (1, 0, 1)).$$

Portanto, devemos ter

$$(1, d, 2) \cdot ((1, 0, 1) \times (1, 1, -1)) = (1, d, 2) \cdot ((1, 1, -1) \times (1, 0, 1)) = 0.$$

Repetindo os cálculos do item anterior:

$$(1, d, 2) \cdot ((1, 0, 1) \times (1, 1, -1)) = (1, d, 2) \cdot (-1, 2, 1) = 0,$$

ou seja,

$$-1 + 2d + 2 = 0, \qquad d = -1/2.$$

---

2) Considere o ponto $P = (1, 0, 1)$ e a reta r e o plano π de equações

$$r\colon (1 + t, 2 - t, t) \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \pi\colon x + y - z = 1.$$

a) Determine o ponto Q da reta r mais próximo de P.

b) Determine a distância d entre o ponto P e a reta r.

c) Determine um ponto A de r tal que a distância entre P e A seja $\sqrt{14}$.

d) Determine o ponto B da reta r tal que B, P e o ponto $(1,2,0)$ da reta r sejam os vêrtices de um triângulo de área $\sqrt{6}$.

e) Determine o ponto C do plano π mais próximo de P.

f) Determine a distância d' entre o ponto P e o plano π.

Respostas: O ponto Q é obtido como a interseção do plano ρ ortogonal á reta r que contém o ponto P e a reta r. O vetor normal ρ é o vetor diretor da reta r, isto é, $(1,-1,1)$. Portanto,

$$\rho\colon x - y + z = d, \qquad 1 - 0 + 1 = d, \qquad d = 2.$$

Para obter a interseção da reta r e do plano ρ encontramos o parâmetro t tal que o ponto $(1+t, 2-t, t)$ pertence ao plano:

$$(1+t) - (2-t) + t = 2, \qquad -1 + 3t = 2, \qquad t = 1.$$

Portanto,

$$Q = (2,1,1).$$

Verifique, usando o produto escalar, que o vetor $\overline{PQ} = (1,1,0)$ é ortogonal ao vetor diretor de r.

Outra forma de resolver o problema: o ponto Q é o ponto X da reta r que verifica

$$\overline{PX} \cdot (1,0,1) = 0.$$

O vetor $\overline{PX} = (t, 2-t, t-2)$. Portanto,

$$\overline{PX} \cdot (1,0,1) = t + t - 2 = 0, \qquad t = 1.$$

Obtendo assim o ponto $Q = (2,1,1)$ acima.

A distância d do ponto P á reta r é o módulo do vetor $\overline{PQ} = (1,1,0)$:

$$d = \sqrt{2}.$$

O ponto A da reta r é o ponto X da reta tal que

$$|\overline{PX}| = |(t, 2-t, t-1)| = \sqrt{14},$$

Isto é,

$$t^2 + (2-t)^2 + (t-1)^2 = 14, \quad 3t^2 - 6t - 9 = 0, \quad t^2 - 2t - 3 = 0.$$

Os valores de t que verificam a equação são:

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}, \quad t = 3 \quad \text{ou} \quad t = -1.$$

Obtemos

$$A = (4,-1,3) \qquad \text{ou} \qquad A = (0,3,-1).$$

Escreva $M = (1,2,0)$. O ponto B é da forma $(1+t, 2-t, t)$ (pois pertence a reta r) e deve verificar a condição da área do triângulo:

$$|\overline{MP} \times \overline{MB}| = 2\sqrt{6}.$$

Isto é, t deve verificar:

$$|\overline{MP} \times \overline{MB}| = |(0,-2,1) \times (t,-t,t)| = |(t,-t,-2t)| = 2\sqrt{6}.$$

Ou seja,

$$\pm\sqrt{6}t = 2\sqrt{6}, \qquad t = \pm 2.$$

Logo

$$B = (3,0,2) \qquad \text{ou} \qquad B = (-1,4,-2).$$

O ponto C é obtido como a interseção da reta s perpendicular ao plano π contendo ao ponto P e o próprio plano π. O vetor diretor da reta s é o vetor normal de π. Portanto,

$$s\colon (1+t, t, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A interseção da reta s e o plano π ocorre quando

$$(1+t) + (t) - (1-t) = 1, \qquad 3t = 1, \qquad t = 1/3.$$

Logo

$$C = (4/3, 1/3, 2/3).$$

Confira que $\overline{CP}$ é paralelo ao vetor normal do plano π.

A distância d' pedida do ponto P ao plano π é o módulo de $\overline{CP} = (1/3, 1/3, -1/3)$:

$$d' = \sqrt{3}/3.$$

---

3) Considere o ponto $P = (2,1,1)$ e as retas r_1 e r_2 de equações paramétricas

$$r_1\colon (1+t, 2t, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad r_2\colon (5+2t, 3-t, 1+2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Escreva a reta r_1 como interseção de dois planos (escritos de forma cartesiana) π e ρ, onde π é paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ e ρ é paralelo ao plano

$$\tau\colon x + y + 3z = 0.$$

b) Determine a equação cartesiana do plano β que contém o ponto P e a reta r_1.

c) As retas r_1 e r_2 são concorrentes. Determine o ponto C de interseção destas duas retas.

d) Determine as equações paramétricas da reta r_3 perpendicular comum a r_1 e r_2 (isto é, r_3 intercepta as retas r_1 e r_2 e é perpendicular a ambas retas).

Respostas: O plano ρ é paralelo a τ. Logo é da forma

$$\rho\colon x + y + 3z = d.$$

Como o plano contém a reta r_1 temos:

$$(1 + t) + (2t) + 3(1 - t) = d, \quad 1 + 3 = d, \quad d = 4.$$

Para determinar o plano π observe que os vetores $(1, 0, 0)$ e $(1, 2, -1)$ são paralelos a π. Portanto, seu vetor normal é

$$(1, 2, -1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, 2).$$

Logo

$$\pi\colon y + 2z = d.$$

Como o plano contém a reta r_1, temos

$$(2t) + 2(1 - t) = d, \quad d = 2.$$

Portanto,

$$\pi\colon y + 2z = 2, \qquad \rho\colon x + y + 3z = 4.$$

Considere o ponto $M = (1, 0, 1)$ de r_1. Portanto, os vetores

$$\overline{MP} = (1, 1, 0), \qquad (1, 2, -1)$$

são paralelos ao plano β. Portanto, um vetor normal de β é

$$(1, 1, 0) \times (1, 2, -1) = (-1, 1, 1).$$

Logo

$$\beta\colon x - y - z = d.$$

Obtemos d pela condição $P \in \beta$: $2 - 1 - 1 = d = 0$. Portanto,

$$\beta\colon x - y - z = 0.$$

O ponto de interseção das retas r_1 e r_2 é obtido resolvendo o sistema:

$$\begin{array}{lcl} 1 + t & = & 5 + 2s \\ 2t & = & 3 - s \\ 1 - t & = & 1 + 2s, \end{array}$$

onde t e s são as incógnitas. Resolvendo obtemos

$$2t = 3 - s, \quad -t = 2s, \quad -4s = 3 - s, \quad s = -1, \quad t = 2.$$

Esta condição é compatível com a primeira equação. O ponto de interseção é $C = (3, 4, -1)$.

Um vetor diretor da reta r_3 é obtido como o produto vetorial dos vetores diretores das retas r_1 e r_2:

$$(1, 2, -1) \times (2, -1, 2) = (3, -4, -5).$$

Portanto,

$$r_3\colon (3 + 3t, 4 - 4t, -1 - 5t), \quad t \in \mathbb{R}.$$