Gabarito da P1 de Algebra linear I

1. Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

   (a) V
   (b) V
   (c) F
   (d) V
   (e) F
   (f) F
   (g) V
   (h) V
   (i) V

2. Considere os vetores

$$v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (-1, 0, 1).$$

   (a) Determine os valores de **a** para que os vetores v_1, v_2 e

$$v_3 = (1, 1, a)$$

   sejam coplanares.

   (b) Determine os valores de **b** para que o paralelepipedo de vértices

$$(0, 0, 0),\ (1, 2, 3),\ (-1, 0, 1),\ (1, 1, b)$$

   tenha volume igual a 1.

Respostas

2.a Os valores de **a** para os quais os vetores v_1, v_2, v_3 são coplanares é o conjunto dos valores tais que o determinante da matriz 3×3 cujas linhas são as coordenadas dos vetores v_1, v_2, v_3 é zero. Existe um único valor, **a**$= 1$.

2.b Os valores de **b** procurados são tais que o módulo do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores $(1,2,3), (-1,0,1), (1,1,b)$ é igual a 1. O módulo do determinante desta matriz é

$$|-2+2b|.$$

Por tanto, procuramos as soluções das seguintes equações:

$$-2+2b=1,$$

$$2-2b=1.$$

A primeira tem solução $b=\frac{3}{2}$, a segunda tem solução $b=\frac{1}{2}$.

3. Considere o ponto $P=(0,0,1)$ e a reta r de equações cartesianas

$$r: x-y-z=1,\ x+y+z=0.$$

   (a) Determine um vetor diretor da reta r. **Resposta:** Qualquer múltiplo do produto vetorial dos vetores $u=(1,-1,-1)$ e $v=(1,1,1)$, $u\times v=(0,-2,2)$.

   (b) Determine uma equação paramétrica da reta r. **Resposta:** $r(t)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)+t(0,-1,1)$.

   (c) Determine a equação cartesiana do plano π perpendicular à reta r que contém o ponto P. **Resposta:** $-y+z=1$.

   (d) Calcule a distancia entre o ponto P e a reta r. **Resposta:** A distancia é $\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}$.

   (e) Determine as equações cartesianas da reta s paralela à reta r que contém o ponto $Q=(1,1,1)$. **Resposta:** $s: x=1,\ y+z=2$.

   (f) Calcule a distancia entre o ponto P e o plano $x+y+z=0$. **Resposta:** A distancia é $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

   (g) Encontre um plano ρ contendo a origem $(0,0,0)$ tal que a distancia entre o ponto P e o plano ρ seja igual à distancia entre P e a origem. **Resposta:** $z=1$.

4. Considere os pontos de R^3

$$P_1=(1,0,0),\ P_2=(1,1,1),\ P_3=(2,1,2).$$

(a) Determine os vértices dos três paralelogramos que têm como vértices comuns os pontos P_1, P_2, P_3.

(b) Mostre que todos os paralelogramos do item (a) têm a mesma área e ache o valor da mesma.

Respostas

4.a Sejam $u = P_2 - P_1 = (0, 1, 1)$, $v = P_3 - P_1 = (1, 1, 2)$. Os vértices solicitados tem equações

$$Q_1 = P_1 + u + v = (2, 2, 3),$$

$$Q_2 = P_1 + u - v = (0, 0, -1),$$

$$Q_3 = P_1 + v - u = (2, 0, 1).$$

4.b A área do paralelogramo de vértices P_1, P_2, P_3, Q_1 pode ser calculada usando a norma do produto vetorial $\| u \times v \| = \sqrt{3}$.

A área do paralelogramo de vértices P_1, P_2, P_3, Q_2 é a norma do produto vetorial $\| v \times (u - v) \| = \| u \times v \|$.

E a área do paralelogramo de vértices P_1, P_2, P_3, Q_3 é a norma do produto vetorial $\| u \times (v - u) \| = \| u \times v \|$.

Por tanto, todas elas coincidem. Outra maneira de mostrar que as áreas são iguais é observando que cada paralelogramo é a união de dois triángulos congruentes com o triángulo cujos vértices são P_1, P_2, P_3, e triángulos congruentes tem a mesma área.