P1 de Álgebra Linear I – 2003.1

Data: 7 de abril de 2003.

Gabarito

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "N= não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		F	
1.b		F	
1.c		F	
1.d		F	
1.e		F	
1.f		F	
1.g		F	
1.h	V		
1.i		F	
1.j		F	

1.a) Existem vetores não nulos $\bar{u}$ e $\bar{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que $\bar{u}\cdot\bar{w}=0$ e $\bar{u}\times\bar{w}=\bar{0}$.

Falso: Observe que

$$\bar{u}\cdot\bar{w}=|\bar{u}|\,|\bar{w}|\,\cos\alpha,$$

onde α é o ângulo formado pelos vetores $\bar{w}$ e $\bar{u}$. Como o produto escalar é zero e $|\bar{u}|\neq 0\neq|\bar{w}|$, temos que $\cos\alpha=0$. Portanto, $\alpha=\pi/2$ ou $2\pi/3$.

Da fórmula do módulo do produto vetorial temos

$$|\bar{u}\times\bar{w}|=|\bar{u}|\,|\bar{w}|\,|\mathrm{sen}\,\alpha|.$$

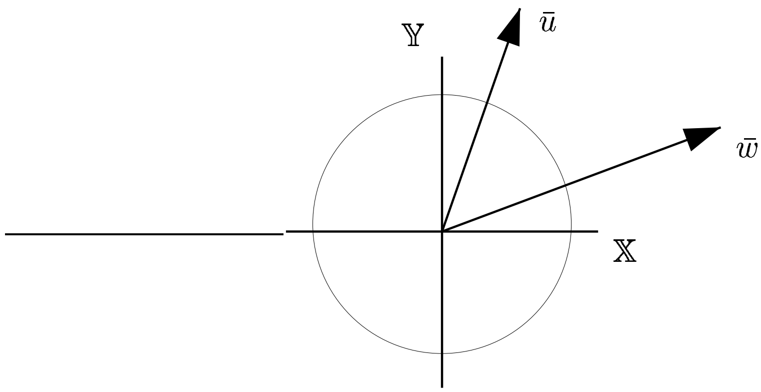

Figura 1: Questão 1.c

Como $|\mathrm{sen}\,\alpha| = 1$ se $\alpha = \pi/2$ or $3\pi/2$, temos

$$|\bar{u} \times \bar{w}| = |\bar{u}|\,|\bar{w}| \neq 0,$$

pois $|\bar{u}| \neq 0 \neq |\bar{w}|$.

1.b) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1,2,2) \times (a,1,a) = (0,0,0)$.

Falso: Observe que

$$(1,2,2) \times (a,1,a) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = (2a-2, -a+2a, 1-2a).$$

Para o vetor resultante ser nulo deveriamos ter (simultaneamente) $a = 1$, $a = 0$ e $a = 1/2$, o que é impossível.

Outra possibilidade é observar que $(1,2,2) \times (a,1,a) = \bar{0}$ se e somente se os vetores são paralelos, ou seja $(a,1,a) = \sigma(1,2,2)$, para algum σ. Usando a segunda coordenada, temos $\sigma = 1/2$. Logo $a = 1/2$ (primeira coordenada) e $a = 1$ (terceira), o que é absurdo.

1.c) Considere os vetores $\bar{u}$ e $\bar{w}$ na Figura 1. Então $\bar{u} \cdot \bar{w} < 0$.

Falso: Temos $\bar{u} \cdot \bar{w} = |\bar{u}|\,|\bar{w}|\,\cos\alpha$, onde α é o ângulo formado pelos vetores $\bar{u}$ e $\bar{w}$. Como $\alpha \in (0, \pi/2)$ temos $\cos\alpha > 0$, e o produto escalar é positivo.

1.d) A distância entre duas retas contidas no mesmo plano é zero.

Falso: Esta afirmação somente é verdadeira se as retas são concorrentes ou iguais. Por exemplo, as retas $r_1 = (t, t, t)$ e $r_2 = (1 + t, 2 + t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ são paralelas e estão contidas no plano $x - z = 0$. A distância entre estas retas é $\sqrt{2}/\sqrt{3}$, esta distância é obtida como segue: considere os pontos $P = (0, 0, 0) \in r_1$ e $Q = (1, 2, 1) \in r_2$ e o vetor diretor $v = (1, 1, 1)$ de r_1, então a distância d entre r_1 e r_2 é

$$d = \frac{|\overline{PQ} \times v|}{|v|} = \frac{|(-1, 0, 1)|}{|(1, 1, 1)|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

1.e) Considere dois vetores $\bar{w}$ e $\bar{v}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que $w \times v = \bar{0}$. Então $w \cdot v = |w|\,|v|$.

Falso: A condição $w \times v = \bar{0}$ implica que os vetores são paralelos, mas eles podem formar ângulo π, e em tal caso o produto escalar é negativo. Por exemplo, considere os vetores $\bar{u} = (1, 1, 1)$ e $\bar{w} = (-1, -1, -1)$, temos $\bar{u} \times \bar{w} = 0$ e

$$\bar{u} \cdot \bar{w} = -3 \neq |\bar{u}|\,|\bar{v}| = \sqrt{3}\,\sqrt{3} = 3.$$

1.f) Considere os planos de equações cartesianas

$$\begin{aligned} \pi_1 &: a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ \pi_2 &: a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ \pi_3 &: a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{aligned}$$

Suponha que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Então os planos π_1, π_2 e π_3 se interceptam ao longo de uma reta.

Falso: Há outras possibilidades. Por exemplo os planos podem ser paralelos e diferentes sem apresentar interseções, isto ocorre com os planos $x+y+z = 1$, $x + y + z = 2$ e $x + y + z = 3$. Outra possibilidade, os planos podem se interceptar dois a dois em retas paralelas sem apresentar interseção comum, como acontece com os planos $x + y + z = 1$, $x - y + z = 1$ e $x + z = 5$. Outra possibilidade, dois planos são paralelos e o terceiro intercepta os outros planos em retas paralelas, por exemplo, os planos $x+y+z=1$, $x+y+z=2$ e $x=3$.

1.g) Considere vetores $\bar{v}$ e $\bar{w}$ de $\mathbb{R}^3$. Então

$$\bar{v} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (\bar{v} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{0} \times \bar{w} = \bar{0}.$$

Falso: Considere os vetores $\bar{v} = (1,0,0)$ e $\bar{w} = (0,1,0)$. Temos

$$\bar{v} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = (1,0,0) \times ((1,0,0) \times (0,1,0)) = (1,0,0) \times (0,0,1) = (0,-1,0).$$

Porém, sempre se verifica, $(\bar{v} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{0} \times \bar{w} = \bar{0}$.

1.h) Os pontos $A = (2,2,2)$, $B = (0,4,2)$ e $C = (1,2,1)$ formam um triângulo retângulo.

Verdadeiro: Os vetores correspondentes aos lados do triângulo são

$$\overline{AB} = (-2,2,0), \quad \overline{AC} = (-1,0,-1), \quad \overline{BC} = (1,-2,-1).$$

O triângulo será retângulo se dois destes vetores forem ortogonias (ou seja, seu produto escalar é nulo). Como

$$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = -1 + 0 + 1 = 0,$$

o triângulo é retângulo e a afirmação é verdadeira.

1.i) Os pontos $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,2)$ e $C = (3,2,2)$ formam um triângulo equilátero.

Falso: Os vetores correspondentes aos lados do triângulo são

$$\overline{AB} = (1,2,1), \quad \overline{AC} = (2,1,1), \quad \overline{BC} = (1,-1,0).$$

O triângulo será equilátero se os módulos destes vetores forem iguais, mas isto não acontece:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= |(-1,2,1)| = \sqrt{6}, \\ |\overline{AC}| &= |(2,1,1)| = \sqrt{6}, \\ |\overline{BC}| &= |(1,-1,0)| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

De fato, o triângulo é isósceles.

1.j) Considere o plano π de equações paramétricas

$$x = 1 + t - s, \quad y = 1 - t + s, \quad z = -1 + 2t + s,$$

Então $x - y - 2z = 2$ é uma equação cartesiana de π.

Falso: Das equações paramétricas do plano temos que $\bar{v} = (1, -1, 2)$ e $\bar{w} = (-1, 1, 1)$ são vetores paralelos a π. Se a equação cartesiana de π fosse $x - y - 2z = 2$ então $(1, -1, -2)$ (o vetor normal de tal plano) deveria ser perperdicular a $\bar{v}$ e $\bar{w}$, mas $(1, -1, 2) \cdot (1, -1, -2) = -2 \neq 0$.

2) Considere os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 2, 2)$ e $C = (2, 1, 2)$.

a) Determine a área do triângulo T de vértices A, B e C.

b) Determine um vetor normal ao plano π que contém os pontos A, B e C.

c) Determine equações paramétricas do plano π.

d) Determine uma equação cartesiana do plano π.

e) Determine um ponto D tal que os pontos A, B, C e D formem um paralelogramo P.

Resposta: Considere os vetores $\overline{AB} = (-1, 2, 1)$ e $\overline{AC} = (1, 1, 1)$. A área do triângulo T e $1/2$ da área de um paralelogramo R de vértices A, B e C. Temos

$$\text{área}(R) = |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |(1, 2, -3)| = \sqrt{14}.$$

Portanto, a área de T é $\sqrt{14}/2$.

Observe que no item (a) determinamos o vetor normal ao plano, obtido como $\overline{AB} \times \overline{AC} = (1, 2, -3)$. Logo um vetor normal é $(1, 2, -3)$ e a equação cartesiana do plano é da forma

$$x + 2y - 3z = d,$$

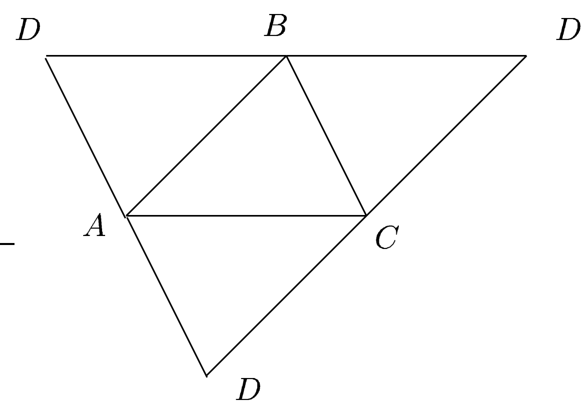

Figura 2: Questão 2.e

onde d é determinado pela condição dos pontos A, B e C pertencer a π, ou seja: $1 + 0 - 3 = d = -2$. (Observe que respondemos simultaneamente aos itens (b) e (d)).

Para determinar as equações paramétricas de π devemos conhecer dois vetores paralelos a π (não paralelos entre si) e um ponto do plano. Podemos escolher $\overline{AB} = (-1, 2, 1)$ e $\overline{AC} = (1, 1, 1)$ e o ponto $A = (1, 0, 1)$. Portanto,

$$x = 1 - t + s, \quad y = 0 + 2t + s, \quad z = 1 + t + s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, para o item (e), há as seguintes possibilidades para o ponto D:

- $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$, isto é, $\overline{AB} = \pm\overline{CD}$,
- $\overline{AC}$ paralelo a $\overline{BD}$, isto é $\overline{AC} = \pm\overline{BD}$

No primeiro caso podemos ter

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{AC} + \overline{AB}, \quad D = B + C - A = (0, 2, 2) + (2, 1, 2) - (1, 0, 1) = (1, 3, 3), \\ \overline{AD} &= \overline{AB} - \overline{AC}, \quad D = B - C + A = (0, 2, 2) - (2, 1, 2) + (1, 0, 1) = (-1, 1, 1). \end{aligned}$$

No segundo caso podemos ter

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{AC} - \overline{AB}, \quad D = C - B + A = (2, 1, 2) - (0, 2, 2) + (1, 0, 1) = (3, -1, 1), \\ \overline{AD} &= \overline{AB} - \overline{AC}, \quad D = B - C + A = (0, 2, 2) - (2, 1, 2) + (1, 0, 1) = (-1, 1, 1). \end{aligned}$$

3) Considere as retas r_1 de equações paramétricas

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}$$

e r_2 cujas equações cartesianas são

$$y - z = 0, \quad 2\,x - y = 2.$$

a) Determine equações cartesianas da reta r_1.

b) Determine as equações paramétricas de r_2.

c) Determine a equação cartesiana do plano ρ que contém o ponto $Q = (1, 0, 0)$ e é ortogonal à reta r_1.

d) Calcule a distância entre as retas r_1 e r_2.

e) Determine, se possível, um ponto P da reta r_2 tal que a distância entre P e r_1 seja $1/3$.

f) Considere os pontos $A = (1, 1, 1) \in r_1$ e $B = (2, 2, 2) \in r_2$. Determine um ponto C de r_1 tal que o triângulo de vértices A, B, C seja retângulo.

Resposta: Para calcular equações cartesianas de r_1 devemos encontrar dois planos π e ρ (em equações cartesianas) não paralelos contendo à reta r. Os vetores normais de tais planos devem ser ortogonais ao vetor diretor $\bar{v}$ de r, onde $\bar{v} = (1, 2, 2)$. Logo podemos escolher $\bar{n} = (2, -1, 0)$ e $\bar{m} = (0, 1, -1)$. Logo as equações dos planos são

$$\pi\colon 2\,x - y = d, \quad \rho\colon y - z = d'.$$

Logo, usando que o ponto $(1, 1, 1)$ pertence à reta, temos

$$2\,x - y = 1, \quad y - z = 0.$$

Outra possibilidade é usar o método de eliminação de parâmetros. Temos $t = y - x$. Logo $z = 1 + 2(y - x)$. Portanto, um plano é

$$2x - 2y + z = 1.$$

Também temos $y = z$. Logo outra possibilidade é:

$$2\,x - 2\,y + z = 1, \quad y - z = 0.$$

Para determinar as equações paramétricas de r_2 observe que um vetor diretor de r_2 é $(0,1,-1) \times (2,-1,0) = (-1,-2,-2)$. Portanto, podemos consiserar o vetor $(1,2,2)$. Observe que um ponto da reta é $(1,0,0)$. Logo as equações paramétricas de r_2 são:

$$x = 1 + t, \quad y = 2\,t, \quad z = 2\,t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Outra possibilidade é resolver o sistema escolhendo $z = t$ como parámetro. Temos $y = z = t$ e $x = 1 + t/2$, $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$x = 1 + t/2, \quad y = t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para o item (c), Observe que um vetor normal ao plano ρ é o vetor diretor da reta r_1, ou seja $(1,2,2)$. Portanto, a equação cartesiana de ρ é da forma

$$\rho\colon x + 2\,y + 2\,z = d,$$

onde d é obtido da condição $Q \in \rho$, ou seja,

$$\rho\colon x + 2\,y + 2\,z = 1 + 0 + 0 = 1 = d.$$

O ponto P da reta r_1 mais próximo de $Q \in r_2$ é a interseção de r_1 e o plano ρ do item anterior, e a distancia entre r_1 e r_2 é o módulo do vetor $\overline{PQ}$ (que deve necessariamente ser ortogonal ao vetor diretor da reta). Para calcular $r_1 \cap \rho$, substituímos a equação de r_1 na de ρ, obtendo

$$(1+t) + 2\,(1 + 2\,t) + 2\,(1 + 2\,t) = 1, \quad 9\,t + 5 = 1, \quad t = -4/9.$$

Portanto,

$$P = (1 - 4/9, 1 - 8/9, 1 - 8/9) = (5/9, 1/9, 1/9).$$

Temos agora

$$\overline{PQ} = (4/9, -1/9, -1/9)$$

(que é ortogonal a $(1,2,2)$). Portanto, a distância é $\sqrt{18}/9 = \sqrt{2}/\sqrt{9} = \sqrt{2}/3$.

Outra opção é a seguinte, para cada ponto $T = (1+t, 1+2\,t, 1+2\,t)$ da reta r_1 considere o vetor $\overline{QT} = (t, 1+2\,t, 1+2\,t)$. O ponto de r_1 mais próximo de Q é dado pela condição

$$\overline{PT} \cdot (1,2,2) = 0 = t + 2 + 4\,t + 2 + 4\,t = 4 + 9\,t.$$

Obtendo, como acima, $t = -4/9$.

Como as duas retas são paralelas, todos os pontos da reta r_2 estão a mesma distância da reta r_1. Esta distância foi calculada no item anterior e é $\sqrt{2}/3$. Portanto, não existe nenhum ponto de r_2 a distância $1/3$ de r_1, pois $1/3 < \sqrt{2}/3$.

Observe que as retas r_1 e r_2 são paralelas. O ponto C é obtido considerando a interseção da reta r_1 e o plano α ortogonal a r_1 contendo B. Em tal caso, por construção, $\overline{AC}$ é ortogonal a $\overline{AC}$ e são os catetos do triângulo.

A equação do plano α é

$$\alpha\colon x + 2y + 2z = 10.$$

A interseção de α e r_1 é obtida como segue:

$$(1 + t) + 2(1 + 2\,t) + 2(1 + 2\,t) = 10, \quad 9\,t = 5, \quad t = 5/9.$$

Portanto o ponto C é

$$C = (14/9, 19/9, 19/9).$$

Verifique que $\overline{BC} = (4/9, -1/9, -1/9)$ é ortogonal a $(1, 2, 2)$ (o vetor diretor de r_2).

4) Considere as retas r_1 e r_2 de equações paramétricas

$$r_1 = (1 + t, 1 + t, 1 + t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad r_2 = (1 - t, 2\,t, 1 + 2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Determine a posição relativa das retas r_1 e r_2 (paralelas, concorrentes, reversas).

b) Caso as retas sejam reversas calcule sua distância. Se são concorrentes seu ponto de interseção, e se são paralelas o plano que contém as duas retas.

Resposta: Certamente as retas não são paralelas, pois os vetores diretores $(1, 1, 1)$ e $(-1, 2, 2)$ das retas r_1 e r_2 não são paralelos.

Para ver se as retas são concorrentes o reversas devemos tentar resolver o sistema (se os sistema não possui solução as retas serão reversas, e concorrentes em caso contrário).

$$1 + t = 1 - s, \quad 1 + t = 2\,s, \quad 1 + t = 1 + 2\,s$$

Das duas primeiras equações temos $1 - s = 2\,s$, $s = 1/3$ e $t = -1/3$. Mas estes valores não verificam a última equação: $2/3 \neq 5/3$. Logo as retas são reversas.

Para calcular a distância d usaremos a seguinte fórmula: escolhemos pontos P em r_1 (por exemplo, $P = (1,1,1)$) e Q em r_2 (por exemplo, $Q = (1,0,1)$) e consideramos o vetor $\overline{QP} = (0,1,0)$, então

$$d = \frac{|(0,1,0) \cdot ((1,1,1) \times (-1,2,2))|}{|(1,1,1) \times (-1,2,2)|}.$$

Temos

$$(1,1,1) \times (-1,2,2) = (0,-3,3).$$

Portanto,

$$d = 3/\sqrt{18} = 3/(\sqrt{9}\,\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2.$$