P1 de Álgebra Linear I – 2002.1
Data: 27 de março de 2001.

Gabarito

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **com caneta** sua resposta no quadro abaixo. **Atenção:** responda **todos** os itens, use "**N** = não sei" caso você não saiba a resposta. Cada resposta certa vale 0.3, cada resposta errada vale -0.2, cada resposta **N** vale 0. Respostas confusas e ou rasuradas valerão -0.2.

1.a) Para todo par de vetores u e w de $\mathbb{R}^3$ vale o seguinte raciocínio:

$$w \times (u \times w) = -w \times (w \times u) = (-w \times w) \times u = \bar{0} \times u = \bar{0}$$

Falso. Justificativa: considere os vetores $w = i$ e $u = j$. Observe que $i \times (j \times i) = i \times (-k) = j \neq \bar{0}$. Observe que, $i \times (j \times i) = i \times (-k) = j$, logo $j = i \times (j \times i) \neq (i \times i) \times j = \bar{0}$.

1.b) Considere vetores v, y e w de $\mathbb{R}^3$ tais que $y \cdot (v \times w) = 1$. Então $w \cdot (v \times y) = 1$.

Falso. Justificativa: $y \cdot (v \times w) = -y \cdot (w \times v) = w \cdot (y \times v) = -w \cdot (v \times y)$. (V. também pode interpretar em termos de troca de duas linhas em um determinante).

1.c) Considere vetores v, y e w de $\mathbb{R}^3$ tais que $y \cdot (v \times w) = 0$.

Então y é ortogonal a w.

Falso. Justificativa: faça $y = w$, então o produto $y \cdot (v \times w) = \bar{0}$, observe que o vetor $n = v \times w$ é ortogonal a w e, portanto, $w \cdot n = 0$. Obviamente, os vetores y e w não são ortogonais (são iguais!).

1.d) Existem dois planos π e ρ de $\mathbb{R}^3$ cuja interseção consiste em um único ponto.

Falso. Justificativa: Para a interseção de dois planos de $\mathbb{R}^3$ existem três possibilidades: (a) um plano (se os dois planos são iguais), (b) uma reta (se os planos não são paralelos), ou (c) o conjunto vazio (os planos são paralelos e distintos).

1.e) Considere vetores y, v e w de $\mathbb{R}^3$ tais que $y \cdot v = 0$ e $w \cdot v = 0$. Então $y \cdot w = 0$.

Falso. Justificativa: Considere, por exemplo, $y = i$, $w = i + j$ e $v = k$, então, $y \cdot v = 0$, $w \cdot v = 0$, mas $y \cdot w = 1 \neq 0$.

1.f) Considere vetores w e v de $\mathbb{R}^3$. Se $w \times v = 0$ então o valor absoluto de $w \cdot v$ é $|w|\,|v|$.

Verdadeiro. Justificativa: Se um dos vetores é o vetor nulo a afirmação é obvia. Suponhamos, portanto, que $|v| \neq 0 \neq |w|$. Então, $|v \times w| = 0 = |v||w| \sin \alpha$ (onde α é o ângulo formado por w e v). Logo, $\sin \alpha = 0$, e $\alpha = 0$ ou π. Portanto,

$$|w \cdot v| = ||w||v| \cos \alpha| = | \pm |w||v|| = |v||w|.$$

1.g) Considere o sistema

$$a_1x+b_1y+c_1z = d_1, \quad a_2x+b_2y+c_2z = d_2, \quad a_3x+b_3y+c_3z = d_3.$$

Suponha que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Então o sistema não admite solução.

Falso. Justificativa: Considere os planos

$$x + y + z = 1, \quad x - y + z = 0, \quad 2x + 2z = 1.$$

Este sistema tem solução (uma reta, a reta $(t, 1/2, 1/2 - t)$) e o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 2 = 0.$$

1.h) Considere vetores y, v e w de $\mathbb{R}^3$. Então

$$(y + v) \cdot (w \times v) = y \cdot (w \times v).$$

Verdadeiro. Justificativa: observe que, pelas propriedades do produto escalar,

$$\begin{aligned} (y + v) \cdot (w \times v) &= y \cdot (w \times v) + v \cdot (w \times v) = \\ &= y \cdot (w \times v) - w \cdot (v \times v) = \\ &= y \cdot (w \times v) - w \times \bar{0} = y \cdot (w \times v). \end{aligned}$$

1.i) Considere a reta r que contém o ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e é paralela ao vetor v, e a reta s que contém ao ponto $Q = (q_1, q_2, q_3)$ e é paralela ao vetor w. Seja $\overline{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$. Suponha que $\overline{PQ} \cdot (v \times w) = 0$. Então a distância entre as retas é zero.

Falso. Justificativa: É suficiente considerar duas retas paralelas distintas, por exemplo, $r = (t, t, t)$ e $s = (1 + t, t, t)$. Podemos tomar $v = w = (1,1,1)$, que é um vetor diretor das duas retas. Considere $P = (0,0,0)$ e $Q = (1,0,0)$, e o vetor $\overline{PQ} = (1,0,0)$. Claramente (nem é necessário fazer contas), $\overline{PQ} \cdot (v \times w) = 0$ (pois $v \times w = w \times w = \bar{0}$).

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		F	
1.b		F	
1.c		F	
1.d		F	
1.e		F	
1.f	V		
1.g		F	
1.h	V		
1.i		F	

2) Considere a reta r definida pela interseção dos planos π e ρ,

$$\pi\colon x + 2y + z = 1, \quad \rho\colon -x + y - z = 1.$$

2.a) Determine um vetor diretor da reta r.

2.b) Determine uma equação paramétrica de r.

2.c) Encontre um terceiro plano τ (diferente de π e ρ) que contenha a r (isto é, $\tau \cap \pi \cap \rho$ é igual à reta r).

2.d) Determine a equação cartesiana do plano α que contém a reta r e o ponto $(1,2,1)$.

2.e) Determine a equação cartesiana do plano β perpendicular a r contendo o ponto $(1,2,1)$.

Resposta: Resolvemos o sistema

$$x + 2y + z = 1, \quad -x + y - z = 1,$$

usando o método de escalonamento. Obtemos

$$x + 2y + z = 1, \quad 3y = 2.$$

Logo $y = 2/3$. Susbtituindo na primeira equação, temos

$$x + 4/3 + z = 1.$$

Escolhendo x como parâmetro, temos a equação paramétrica de r,

$$x = t, \quad y = 2/3, \quad z = -1/3 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo um vetor diretor de r é $(1, 0, -1)$ (verifique que este vetor é ortogonal aos vetores normais dos planos π e ρ). Isto resolve os items (a) e (b).

Para resolver o item c, é suficiente considerar o plano $y = 2/3$.

Para encontrar a equação do plano α, considere os vetores $v = (1, 0, -1)$ e o vetor $w = \overline{PQ}$ determinado pelos pontos $P = (0, 2/3, -1/3)$ de r e $Q = (1, 2, 1)$. Observe $w = (1, 4/3, 4/3)$. Considere o vetor $u = (3, 4, 4)$. Os vetores u e v são paralelos a α, logo um vetor normal de α é $v \times u = (4, -7, 4)$. Logo, a equação de α é da forma $4x - 7y + 4z = d$, onde d é determiando pela condição $(1, 2, 1) \in \alpha$. Portanto, $4 - 14 + 4 = -6 = d$. Logo,

$$\alpha \colon 4x - 7y + 4z = -6.$$

(Verifique que a reta r está contida neste plano, para isto é suficiente verificar que o ponto $(0, 2/3, -1/3)$ de r satisfaz a equação).

Para o item (e). Um vetor normal do plano é o vetor diretor de r, isto é, $(1,0,-1)$. Logo β é da forma $x-z=d$, onde d é determinado por $(1,2,1)\in\beta$, logo $d=0$ e $\beta\colon x-z=0$.

3) Considere a reta r de equação cartesiana

$$x+2y+z=4, \quad x-z=0$$

e a reta s de equações paramétricas $(1-2t,t,1+2t)$, $t\in\mathbb{R}$.

3.a) Determine uma equação paramétrica de r.

3.b) Determine a posição relativa das retas r e s (concorrentes, reversas, paralelas, iguais).

3.c) Calcule a distância entre r e s.

Resposta: Para calcular a equação paramétrica é suficiente resolver o sistema. Escalonando obtemos

$$x+2y+z=4, \quad -2y-2z=-4,$$

logo,

$$x+2y+z=4, \quad y+z=2.$$

Escolhendo z como parâmetro, $y=2-t$ e $x=4-4+2t-t=t$. Logo as equações paramétricas são:

$$x=t, \quad y=2-t, \quad z=t, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Obviamente, as retas r e s não são paralelas: seus vetores diretores são $u=(1,-1,1)$ e $v=(-2,1,2)$, que não são paralelos. Logo as retas são reversas ou concorrentes.

Considere o ponto $P\in r$, $P=(0,2,0)$, e $Q\in s$, $Q=(1,0,1)$. As retas serão reversas se $\overline{PQ}\cdot(u\times v)\neq 0$, caso contrário as retas serão concorrentes.

Observe que $\overline{PQ} = (1, -2, 1)$, Temos

$$\overline{PQ} \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - (-2)(4) - 1 = 4.$$

Logo as retas são reversas.

Outra possibilidade de resolução é considerar o sistema

$$t = 1 - 2s, \quad 2 - t = s, \quad t = 1 + 2s.$$

Se o sistema tiver solução as retas serão concorrentes, caso contrário serão reversas. Veja que o sistema não admite solução.

Finalmente, para calcular a distância d entre as retas usamos a fórmula

$$d = \frac{|\overline{PQ} \cdot (u \times v)|}{||u \times v||}.$$

Observe que o numerador já foi calculado e é 4. O denominador é,

$$(u \times v) = n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3, 4, -1).$$

O vetor n tem módulo $\sqrt{26}$. Logo $d = 4/\sqrt{26}$.

4) Considere o plano $\pi\colon x + 2y - z = 1$.

4.a) Determine a equação cartesiana do plano ρ paralelo a π que contém a origem.

4.b) Calcule a distância entre ρ e π.

4.c) Determine a equação cartesiana do plano τ perpendicular a π que contém os pontos $(1,0,0)$ e $(0,0,-1)$.

4.d) Calcule o ponto do plano ρ mais próximo do ponto $(1,0,0)$.

4.e) Ache um ponto X no plano ρ da forma $(x,0,z)$ tal que os pontos $P=(1,0,0)$, $Q=(0,0,-1)$ (P,Q no plano π) determinem um triângulo retângulo cujos catetos são PQ e QX.

Resposta: Para o item (a). O plano ρ tem o mesmo vetor normal de π, logo

$$\rho\colon x+2y-z=0.$$

Para resolver o item (b), calcular a distância entre π e ρ é suficiente calcular a distância da origem a π. Para isto, por exemplo, encontraremos o ponto A de interseção da reta $(t,2t,-t)$ (a reta normal a π contendo o ponto $(0,0,0)$) e o próprio plano π. O ponto de interseção ocorre quando

$$t+4t+t=1, \quad t=1/6.$$

Logo $A=(1/6,2/6,-1/6)$. Portanto, a distância de 0 a π é o comprimento do segmento $\overline{0A}$, que é $\sqrt{6}/6$.

No item (c), para determinar o plano τ observe que os vetores $(1,2,-1)$ (o vetor normal a π) e $(1,0,1)$ (o vetor determinado pelos pontos $(1,0,0)$ e $(0,0,-1)$) são paralelos a τ. Logo um vetor normal a τ é

$$(1,2,-1)\times(1,0,1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(2,-2,-2).$$

Logo $(1,-1,-1)$ é um vetor normal a τ. Portanto, τ é da forma $x-y-z=d$, onde d é determinado por $(1,0,0)$ pertencer a τ. Logo $d=1$, e a equação cartesiana de τ é $x-y-z=1$.

Para o item (d), observe que o ponto de ρ mais próximo de $(1,0,0)$ é obtido como a interseção da reta $(1+t, 2t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, (a reta perpendicular a ρ contendo $B = (1,0,0)$) e o plano ρ. Esta interseção ocorre quando

$$1 + t + 4t + t = 0, \quad t = -1/6.$$

Logo o ponto é $A = (5/6, -2/6, 1/6)$. (Observe que o vetor $\overline{AB} = (1/6, 2/6, -1/6)$ é perpendicular a ρ).

Para o último item, considere o vetor $\overline{QP} = (1,0,1)$. Observe que, necessariamente, o vértice X está no plano perpendicular a $(1,0,1)$ que contém $Q = (0,0,-1)$. Este plano tem equação cartesiana

$$x + z = -1.$$

Logo o vértice é qualquer ponto da forma $(x, 0, -1-x)$.