P1 de Álgebra Linear I – 2001.2
Sábado, 15 de setembro de 2001.
Gabarito

1) Sejam u e v **vetores unitários** de $\mathbb{R}^3$.

a) Suponha que $(u+v)\cdot(u+v) = (u-v)\cdot(u-v)$. Calcule o ângulo formado pelos vetores u e v.

b) Suponha que $(u+v)\cdot(u+v) = (u-v)\cdot(u-v) + 2\sqrt{2}$. Calcule o ângulo formado pelos vetores u e v.

c) Suponha que $u \times v = \bar{0} = (0,0,0)$. Calcule $|u \cdot v|$.

d) Considere um vetor n. Sabendo que $n \cdot (u \times v) = 5$, calcule $v \cdot (n \times u)$

e) Considere um vetor não nulo n. Calcule $u \cdot (n \times n)$.

Resposta:
a) Pelas propriedades do produto escalar, $(u+v)\cdot(u+v) = u\cdot(u+v) + v\cdot(u+v) = u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v$. Como u e v são vetores unitários, $u\cdot u = v\cdot v = 1$. Lembre também que $u\cdot v = v\cdot u$. Logo,

$$(u+v)\cdot(u+v) = 2 + 2\,u\cdot v.$$

Analogamente, $(u-v)\cdot(u-v) = u\cdot(u-v) - v\cdot(u-v) = u\cdot u - u\cdot v - v\cdot u + v\cdot v$. Como u e v são vetores unitários, $u\cdot u = v\cdot v = 1$. Lembre também que $u\cdot v = v\cdot u$. Logo,

$$(u-v)\cdot(u-v) = 2 - 2\,u\cdot v.$$

Usando que $(u+v)\cdot(u+v) = (u-v)\cdot(u-v)$, temos

$$2 + 2u\cdot v = 2 - 2\,u\cdot v, \quad 4\,u\cdot v = 0, \quad u\cdot v = 0$$

Como $u\cdot v = |u||v|\cos\alpha = \cos\alpha$, onde α é o ângulo formado pelos vetores, temos que $\cos\alpha = 0$, e os vetores são ortogonais (ângulo $\pi/2$ ou $-\pi/2$).

b) Pelos cálculos já feitos, $(u+v)\cdot(u+v) = 2+2\,u\cdot v$ e $(u-v)\cdot(u-v) = 2-2\,u\cdot v$. Logo a igualdade pode ser reescrita como

$$2 + 2u \cdot v = 2 - 2\,u \cdot v + 2\sqrt{2}, \quad 2u \cdot v = -2\,u \cdot v + 2\sqrt{2}, \quad 4u \cdot v = 2\sqrt{2}.$$

Isto é,

$$u \cdot v = \sqrt{2}/2.$$

Novamente, $u \cdot v = |u||v| \cos\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$, onde α é o ângulo formado pelos vetores, temos que $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$, e os vetores formão um ângulo de $\pm\pi/4$.

c) Observe que $|u \times v| = |u||v|\text{sen}\alpha = \text{sen}\alpha = 0$, onde α é o ângulo formado pelos vetores. Logo $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 0$, e os vetores são paralelos. Portanto, $|u \cdot v| = |u||v||\cos(0) = 1$.

d) Pelas propriedades do produto vetorial:

$$v \cdot (n \times u) = -n \cdot (v \times u) = -(-n \cdot (u \times v)) = n \cdot (u \times v) = 5.$$

e) 0bserve $n \times n = \bar{0}$, pois $|n \times n| = |n||n|\text{sen}(0) = 0$. Logo $u \cdot (n \times n) = u \cdot \bar{0} = 0$.

2) Considere o plano $\pi\colon x - y + z = 2$.

a) Determine a equação cartesiana do plano ρ paralelo a π que contém a origem.

b) Determine as equações paramétricas de π.

c) Calcule a distância entre os planos π e ρ.

d) Calcule o ponto de ρ mais próximo do ponto $(1, 0, 1)$ de π.

e) Determine um triângulo retângulo com dois vértices em π e um vértice em ρ.

Resposta:

a) O vetor normal de π é $(1, -1, 1)$. Como ρ é paralelo a π, π e ρ têm o mesmo vetor normal, logo é da forma, $x - y + z = d$. Para determinar d usamos que $(0, 0, 0)$ pertence ao plano ρ, logo $d = 0$ e $\rho\colon x - y + z = 0$.

b) Para determinar as equações paramétricas de π devemos encontrar um ponto P de π e dois vetores u e v paralelos a este plano, isto é, ortogonais a $(1,-1,1)$, e não paralelos entre si.

Podemos tomar $P = (1,0,1)$, $u = (1,1,0)$ (verifica $u \cdot n = 0$) e $v = (0,1,1)$ (verifica $v \cdot n = 0$).

Uma equação paramétrica é

$$x = 1 + t, \quad y = 0 + t + s, \quad z = 1 + s, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Observe que existem outras equações paramétricas de π: o ponto $Q = (2,1,1)$ pertence a π e os vetores $(1,2,1)$ e $(1,7,6)$ são paralelos a π (veja que o produto escalar destes vetores por n é zero). Logo, outra equação paramétrica de π é

$$x = 2 + t + s, \quad y = 2 + 2t + 7s, \quad z = 1 + t + 6s, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

Outra forma de resolver a questão é escolher x e y como parâmetros (t e s) e escrever z, em função destes parâmetros: $x-y+z=2$, logo $t-s+z=2$, $z = 2 - t + s$,

$$x = t, \quad y = s, \quad z = 2 - t + s, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

c) A distância entre os planos é igual a distância de qualquer ponto Q (por exemplo a origem) de ρ a π. Calcularemos esta distância usando dois métodos.

Método 1: Considere o ponto $P = (1,0,1)$ de π. A distância é o módulo da projeção do vetor $\overline{QP} = (1,0,1)$ no vetor normal do plano π, $m = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. O vetor projeção é

$$\begin{aligned}&[(1,0,1)\cdot(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})](1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}) = \\ &= 2/\sqrt{3}(1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}) = (2/3,-2/3,2/3).\end{aligned}$$

Este vetor tem módulo $\sqrt{12}/3 = 2/\sqrt{3}$.

Método 2: Calcularemos o ponto T de interseção do plano π e da reta r perperdicular a π contendo $(0,0,0) \in \rho$. A distância é comprimento do segmento $\overline{0T}$.

A reta r é $(t,-t,t)$, $t \in \mathbb{R}$. Logo para obter o ponto de interseção resolvemos,

$$t - (-t) + t = 2, \quad t = 2/3, \quad T = (2/3, -2/3, 2/3).$$

Observe agora que o tamanho do segmento já foi calculado no item anterior.

d) Para calcular o ponto mais próximo de $A = (1, 0, 1)$ do plano ρ consideramos a interseção da reta s perpendicular a ρ contendo A e o próprio plano ρ. A reta s tem equação, $(1+t, -t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$. O ponto de interseção de s e ρ é obtido resolvendo

$$(1+t) - (-t)(1+t) = 0, \quad 3t = -2, \quad t = -2/3.$$

Logo o ponto é $(1/3, 2/3, 1/3)$.

Existe outro método diferente. É suficiente observar que o vetor projeção de $\overline{QP}$ em $(1, -1, 1)$ é $(2/3, -2/3, 2/3)$. Portanto, dado qualquer ponto B de π se verifica que $C = B - (2/3, -2/3, 2/3) \in \rho$ e que C é o ponto de ρ mais próximo de B. No nosso caso, $(1, 0, 1) - (2/3, -2/3, 2/3) = (1/3, -2/3, 1/3)$.

e) Observe que o triângulo com vértices $B = (1/3, 2/3, 1/3) \in \rho$, $A = (1, 0, 1) \in \pi$ e C (onde C é qualquer ponto de π, $C \neq A$) é um triângulo retângulo: o vetor $\overline{AB}$ é paralelo ao vetor normal do plano π e o vetor $\overline{AC}$ é paralelo a π, logo ortogonal a $\overline{AB}$. Portanto, escolhemos qualquer ponto de π diferente de $(1, 0, 1)$, por exemplo $(2, 2, 2)$.

3) Considere a reta r_1 dada como intersecção dos planos $x - z = 1$ e $x - y = 1$. Seja a reta r_2: $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Determine um vetor diretor de r_1.

b) Determine uma equação paramétrica de r_1.

c) Escreva a reta r_2 como intersecção de dois planos π e ρ dados em equações paramétricas.

d) Calcule a distância entre as retas r_1 e r_2.

e) Determine a posição relativa das retas r_1 e r_2.

Resposta:

a) Sejam $n = (1, 0, -1)$ e $m = (1, -1, 0)$ os vetores normais dos planos que definem r_1. O vetor diretor de r_1 é $v = n \times m = (1, 0, -1) \times (1, -1, 0) = (-1, -1, -1)$. Logo podemos tomar como vetor diretor $(1, 1, 1)$.

b) Existem dois métodos. Primeiro é encontrar um ponto de r_1, por exemplo $(1, 0, 0)$, e a equação é $(1 + t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Outro método é resolver o sistema. Temos $z = x - 1$ e $y = x - 1$. Escolhendo x como parâmetro temos, $(t, -1 + t, -1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$. Observe que as duas equações paramétricas definem a mesma reta.

Outra forma de resolver os itens anteriores é a seguinte: resolvemos o sistema

$$x - z = 1, \quad x - y = 1,$$

temos

$$z = x - 1, \quad y = x - 1.$$

Tomando x como parâmetro temos $(t, t - 1, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Assim temos a equação paramétrica e sabemos que o vetor diretor é $(1, 1, 1)$.

c) Devemos escolher dois planos ρ e π que não sejam paralelos e contenham a r_2. Como o ponto $A = (1, 1, 1) \notin r_2$, o ponto A e r_2 determinam um plano que contém a r_2. Dois vetores paralelos a este plano são $\overline{0A} = (1, 1, 1)$ e $(1, -1, 1)$, e um ponto é a origem, logo a equação paramétrica de π é

$$x = s + t, \quad y = s - t, \quad z = s + t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Para determinar o plano ρ escolhemos um ponto B que não pertença a π, por exemplo, $B = (1, 0, 0)$. Observe que se $B \in \pi$ então

$$1 = s + t, \quad 0 = s - t, \quad 0 = s + t,$$

logo, das duas últimas equações, $s = t$ e $2t = 0$, logo $s = t = 0$, e $1 \neq 0 + 0$.

Raciocinanco como no caso de π, Como $B = (1, 0, 0) \notin r_2$, o ponto B e r_2 determinam um plano que contém a r_2. Dois vetores paralelos a este plano são $\overline{0B}(1, 0, 0)$ e $(1, -1, 1)$, e um ponto é a origem, logo a equação paramétrica de π é

$$x = s + t, \quad y = -t, \quad z = +t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

d) Para calcular a distância entre as retas escolhemos um ponto $P = (1, 0, 0)$ de r_1, um ponto $Q = (0, 0, 0)$ de r_2 e os vetores diretores das duas retas, $(1, 1, 1)$ e $(1, -1, 1)$. Sabemos que a distância d é dada por

$$d = \frac{|\overline{OP} \cdot ((1, 1, 1) \times (1, -1, 1))|}{||(1, 1, 1) \times (1, -1, 1)||} = \frac{|(1, 0, 0) \cdot ((1, 1, 1) \times (1, -1, 1))|}{||(1, 1, 1) \times (1, -1, 1)||}.$$

Temos

$$(1,1,1)\times(1,-1,1)=(2,0,-2), \quad ||(2,0,-2)||=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Também,

$$(1,0,0)\cdot(2,0,-2)=2.$$

Logo a distância é $d=1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$

e) As retas são reversas: não são paralelas (vetores diretores não paralelos) e a distância é não nula.

4) Considere os planos

$$\pi_1\colon x+y-z=1, \quad \pi_2\colon 2x+y+z=2, \quad \pi_3\colon 2x+2y-2z=2, \quad \pi_4\colon x+2z=3,$$

e a reta

$$r\colon (t,2t,3t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

a) Determine a posição relativa de π_1 e π_2.

b) Determine a posição relativa de π_1 e π_3.

c) Determine a posição relativa de π_1, π_2 e π_4.

d) Determine a posição relativa de π_1 e r.

Resposta:

a) O vetor normal n_1 de π_1 é $(1,1,-1)$. O vetor normal n_2 de π_2 é $(2,1,1)$. Como estes vetores não são paralelos (veja que $n_1\neq\sigma n_2$ para todo $\sigma\in\mathbb{R}$ ou que $n_1\times n_2\neq\bar{0}$), os planos se intersectam ao longo de uma reta r.

b) O vetor normal n_1 de π_1 é $(1,1,-1)$. O vetor normal n_3 de π_3 é $(2,2,-2)$. Observe que $n_2=2n_1$. Logo os vetores normais são paralelos e os planos também. Falta ver se são iguais (mesmo plano) ou disjuntos. Como o ponto $(1,0,0)$ pertence aos dois planos, estes são iguais. Observe que a equação de π_3 é obtida multiplicando por 2 a equação de π_1.

c) O vetor normal n_1 de π_1 é $(1,1,-1)$. O vetor normal n_2 de π_2 é $(2,1,1)$. O vetor normal n_4 de π_4 é $(1,0,2)$.

Observe que n_1 não é paralelo a n_2, que n_1 não é paralelo a n_4, e que n_2 não é paralelo a n_4. Logo nenhum plano é paralelo ao outro.

Calculemos $n_1 \cdot (n_2 \times n_4)$,

$$(1,1,-1) \cdot [(2,1,1) \times (1,0,2)] = (1,1,-1) \cdot (2,-3,-1) = 2 - 3 + 1 = 0.$$

Logo os vetores são coplanares. Existem duas possibilidades:

(I) se o sistema admite solução, os planos se intersectam ao longo de uma reta,

(II) se o sistema não admite solução, os planos se intersectam dois a dois ao longo de três retas paralelas entre si.

Para ver se o sistema tem solução escalonaremos os sistema, considerando a segunda equação menos duas vezes a primeira e a terceira menos a primeira,

$$x + y - z = 2, \quad -y + 3z = 0, \quad -y + 3z = 2.$$

Considerando, a terceira menos a segunda, temos,

$$x + y - z = 2, \quad -y + 3z = 0, \quad 0 = 2.$$

Logo o sistema não tem solução, e a resposta é (II).

Outra forma de resolver a questão é a seguinte: O determinante cujas linhas são os vetores normais aos planos é

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-0) - 1(4-1) - 1(0-1) = 2 - 3 + 1 = 0.$$

Por outra parte o determinante obtido susbtituindo a primeira linha pelos coeficientes sem incógnitas é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(2-0) - 1(4-3) - 1(0-3) = 2 - 1 + 3 \neq 0.$$

Logo o sistema não admite solução, e portanto os planos não tem intersecção común.

Por outra parte, como já vimos, os planos não são paralelos, logo se intersectam dois a dois em retas paralelas.

d) O vetor normal n_1 de π_1 é $(1,1,-1)$. O vetor vetor diretor v de r é $(1,2,3)$. Observe que $v \cdot n_1 = 1 + 2 - 3 = 0$. Logo n_1 e v são ortogonais. Isto significa que r e π_1 são paralelos. Como a origem $(0,0,0) \in r$ e não pertence a π_1, a reta e o plano são paralelos e disjuntos.