G3 de Álgebra Linear I – 2011.1

Gabarito

Questão 1) Considere o plano

$$\pi\colon 2\,x - y + z = 1$$

e as retas r_1 e r_2 cujas equações paramétricas são

$$r_1 = (1+t, t, 1+2\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$r_2 = (2-t, 1+t, 1-2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Determine as equações cartesianas de **todos** os planos τ de $\mathbb{R}^3$ tais que a distância entre π e τ seja 1.

b) Determine a distância entre as retas r_1 e r_2.

c) Determine um ponto P cuja distância ao plano π seja 2.

Resposta:

(a) O plano τ deve ser paralelo ao plano π, portanto, deve ser da forma

$$\tau\colon 2\,x - y + z = d.$$

Determinaremos d. Escolhemos o ponto $A = (0, 0, d)$ do plano. A distância entre A e π deve ser 1. A distância entre A e π é igual à distâcia entre A e B, onde B é o ponto de interseção do plano π e da reta

$$r = (2\,t, -t, d+t), \quad t \in \mathbb{R},$$

(isto é, a reta r que contém o ponto A e é perpendicular a π). Esta interseção ocorre para o parámetro t que verifica

$$2\,(2\,t) - (-t) + (d+t) = 1, \quad t = \frac{1-d}{6}.$$

Ou seja
$$B=\left(\frac{2\,(1-d)}{6},\frac{-1+d}{6},\frac{1+5\,d}{6}\right)$$
e
$$|\overline{AB}|=\left|\left(\frac{2\,(1-d)}{6},\frac{-1+d}{6},\frac{1-d}{6}\right)\right|=\frac{\sqrt{6\,(1-d)^2}}{6}=\frac{|1-d|}{\sqrt{6}}.$$
Portanto, devemos ter
$$\frac{|1-d|}{\sqrt{6}}=1,\quad d=1\pm\sqrt{6}.$$
Logo temos dois planos que verificam a condição,
$$\tau_1\colon 2\,x-y+z=1+\sqrt{6}\qquad \text{e} \qquad \tau_2\colon 2\,x-y+z=1-\sqrt{6}.$$

(b) Para calcular a distância entre as retas consideramos pontos $A_1=(1,0,1)\in r_1$ e $A_2=(2,1,1)\in r_2$, o vetor $\overline{A_1\,A_2}=(1,1,0)$ e os vetores diretores $\bar{v}_1=(1,1,2)$ e $\bar{v}_2=(-1,1,-2)$ de r_1 e r_2. A distância d entre as retas r_1 e r_2 é
$$d=\frac{|\overline{A_1A_2}\cdot(\bar{v}_1\times\bar{v}_2)|}{|\bar{v}_1\times\bar{v}_2|}.$$
Temos
$$\bar{v}_1\times\bar{v}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 1&1&2\\ -1&1&-2\end{vmatrix}=(-4,0,2).$$
Portanto,
$$\overline{A_1A_2}\cdot(\bar{v}_1\times\bar{v}_2)=(1,1,0)\cdot(-4,0,2)=-4$$
e
$$|\bar{v}_1\times\bar{v}_2|=\sqrt{20}.$$
Logo
$$d=\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(c) Procuramos um ponto da forma $P=(0,0,z)$ (que é a forma mais simples para fazer os cálculos). Procedendo como no primeiro item, temos que a interseção entre o plano π e a reta que contém o ponto P e é perpendicular a π (esta é a reta r do item (a)) é o ponto

$$D = \left(\frac{2\,(1-z)}{6}, \frac{-1+z}{6}, \frac{1+5\,z}{6} \right)$$

(somente estamos substituindo d por z) e que o vetor

$$|\overline{DP}| = \left| \left(\frac{2\,(1-z)}{6}, \frac{-1+z}{6}, \frac{1-z}{6} \right) \right| = \frac{\sqrt{6\,(1-z)^2}}{6} = \frac{|1-z|}{\sqrt{6}} = 2.$$

Logo

$$z - 1 = \pm 2\sqrt{6}, \quad z = 1 \pm 2\sqrt{6}.$$

Logo temos (por exemplo)

$$P = (0, 0, 1 + 2\sqrt{6}).$$

Questão 2) Considere as transformações lineares

$$A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cujas matrizes na base canônica são, respectivamente,

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad [B] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que a matriz $[A]$ nao é diagonalizável, que 2 é um autovalor de A e que o vetor $v = (1, 1)$ é um autovetor de A, determine a, b e c.

b) Determine **explicitamente** uma matriz diagonal D e uma matriz P tais que

$$[B] = P\,D\,P^{-1}.$$

Resposta:

(a) Como a matriz $[A]$ não é diagonalizável o autovalor $\lambda = 2$ deve ter multiplicidade dois (caso contrário a matriz teria dois autovalores reais diferentes e seria diagonalizável). Portanto, o traço de A deve ser

$$\text{traço}(A) = 2 + 2 = 1 + c, \quad c = 3.$$

Logo

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $(1, 1)$ é um autovalor associado a 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$1 + a = 2, \quad a = 1 \qquad \text{e} \qquad b + 3 = 2, \quad b = -1.$$

Portanto (esta é a única possibilidade)

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verifique que, de fato, esta matriz não é diagonalizável (veja que somente é possível obter uma autovetor linearmente independente associado a 2, e portanto não existe uma base de autovetores de $[A]$).

(b) Necessitamos calcular os autovalores e uma base de autovetores (se possível) de $[B]$. Para isso calculamos o polinômio característico de B.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)\left(18 - 3\,\lambda + \lambda^2 - 6\,\lambda + 6\right) + \\
&- (18 - 3\,\lambda + 6) + 3\,(6 - 6 + 2\,\lambda) = \\
&= (1-\lambda)\left(24 - 9\,\lambda + \lambda^2\right) - (24 - 3\,\lambda) + 6\,\lambda = \\
&= -\lambda\left(\lambda^2 + 10\,\lambda - 24\right).
\end{aligned}$$

Portanto, as raízes são

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = 6,\ 4.$$

Portanto, sabemos que D é da forma

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para determinar P necessitamos calcular os autovetores associados a 0, 6 e 4 (estes autovetores serão as colunas da matriz P na ordem correspondente).

autovetores associados a 0**:** Estes autovetores são obtidos resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é

$$x + 3\,y + 2\,z = 0, \quad x + 3\,y + 2\,z = 0, \quad 3\,x - 3\,y + 6\,z = 0.$$

Escalonando,

$$x + 3\,y + 2\,z = 0, \quad -12\,y = 0.$$

Logo $y = 0$ e $z = -x/2$. Logo podemos escolher o autovetor $(2, 0, -1)$.

autovetores associados a 6**:** Estes autovetores são obtidos resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} 1-6 & 3 & 2 \\ 1 & 3-6 & 2 \\ 3 & -3 & 6-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é

$$-5\,x + 3\,y + 2\,z = 0, \quad x - 3\,y + 2\,z = 0, \quad 3\,x - 3\,y = 0.$$

Da terceira equação obtemos, $x = y$ e substituindo na primeira $-2\,x + 2\,z = 0$, $x = z$. Logo $x = y = z$. Podemos escolher o autovetor $(1, 1, 1)$.

autovetores associados a 4**:** Estes autovetores são obtidos resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} 1-4 & 3 & 2 \\ 1 & 3-4 & 2 \\ 3 & -3 & 6-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é

$$-3\,x + 3\,y + 2\,z = 0, \quad x - y + 2\,z = 0, \quad 3\,x - 3\,y + 2\,z = 0.$$

Somando a primeira e a terceira equações temos $4\,z =$, $z = 0$. Portanto $x = y$. Podemos escolher o autovetor $(1, 1, 0)$.

Portanto, a matriz P é da forma

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0. \end{pmatrix}$$

Questão 3) Considere o sub-espaço vetorial $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{W} = \{v = (x, y, z) \colon x - y + 2\,z = 0\}.$$

a) Considere a transformação linear $C \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica as seguintes propriedades:

- Para qualquer vetor $\bar{v}$ do plano $\mathbb{W}$ se verifica $C(\bar{v}) = \bar{0}$.
- Seja $[C]$ a matriz de C na base canônica. O traço de $[C]$ é 2.

Determine, se possível, uma forma diagonal de C.

b) Determine a matriz (na base canônica) de uma transformação linear $E \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem seja o plano $\mathbb{W}$.

c) Determine uma base ortonormal η de $\mathbb{W}$ que contenha o vetor $\big(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\big)$.

d) Determine as coordenadas do vetor $\bar{v} = (1, 3, 1) \in \mathbb{W}$ na base γ de $\mathbb{W}$

$$\gamma = \left\{ \Big(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{5}}\Big), \Big(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\Big) \right\}.$$

Resposta:

(a) Como o autovalor 0 tem dois autovetores linearmente independentes (qualquer par de vetores l.i. do plano $\mathbb{W}$) sua multiplicidade é no mínimo dois. Note que a multiplicidade não pode ser três: nesse caso o traço de $[C]$ seria 0.

Usando que o traço de $[C]$ é 2 obtemos que o terceiro autovalor λ de C verifica

$$0+0+\lambda=2, \quad \lambda=2.$$

Isto implica que a matriz é diagonalizável (dois vetores l.i. do plano e um autovetor associado a 2 formam uma base de autovetores de C) e que suas formas diagonais são

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) As imagens dos vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ devem estar contidas no plano $\mathbb{W}$ e gerar dito plano. Escolhemos uma base do plano $\{(1,1,0),(2,0,-1)\}$ e fazemos

$$E(1,0,0)=(1,1,0), \quad E(0,1,0)=(2,0,-1), \quad E(0,0,1)=(0,0,0)$$

(por exemplo). Obviamente há muitas mas possibilidades.... Assim temos

$$[E]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) O segundo vetor da base η deve ser perpendicular a $\big(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\big)$ e ao vetor $(1,-1,2)$ normal do plano. Portanto, deve ser perpendicular a

$$(1,1,0)\times(1,-1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2,-2,-2).$$

Ou seja paralelo a $(1,-1,-1)$. Como a base procurada é ortonormal temos duas possibilidades

$$\eta = \Big\{\big(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\big), \big(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\big)\Big\} \quad \text{e}$$
$$\eta = \Big\{\big(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\big), \big(-1/\sqrt{3}, +1/\sqrt{3}, +1/\sqrt{3}\big)\Big\}.$$

(d) Sejam (a,b) as coordenadas do vetor $\bar{v}=(1,3,1)$ na base γ de $\mathbb{W}$. Então

$$(1,3,1)=a\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)+b\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right).$$

Usamos que a base γ é ortonormal e obtemos

$$\begin{aligned}(1,3,1)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)&=a\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)+\\&\quad+b\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

Portanto, $a=1/\sqrt{5}$.

Analogamente,

$$\begin{aligned}(1,3,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)&=a\left(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)+\\&\quad+b\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}}\right).\end{aligned}$$

Portanto, $b=18/\sqrt{30}$. Logo

$$\Big(1,3,1\Big)_\gamma=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{18}{\sqrt{30}}\right).$$

Questão 4)

a) Determine a inversa da matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\-1&2&3\end{pmatrix}.$$

b) Considere a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$$\beta=\{\bar{w}_1=(1,1,1),\bar{w}_2=(1,0,-1),\bar{w}_3=(1,-2,1)\}.$$

e a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$T(\bar{v}) = \bar{v} \times (1,1,1) = \bar{v} \times \bar{w}_1.$$

Determine a matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

Resposta:

a) Utilizaremos o método de Gauss (operações com linhas) para o cálculo da matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Início:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Operações: (II) $-$ 2(I) e (III) + (I)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operação: (II)/-2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operação: (III) $-$ 3(II)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operação: (III) 2/5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Operações: (I)$-$(III) e (II)$-1/2$ (III)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9/5 & -3/5 & -2/5 \\ 7/5 & -4/5 & -1/5 \\ -4/5 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Operação: (I)$-$(II)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ 7/5 & -4/5 & -1/5 \\ -4/5 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ 7/5 & -4/5 & -1/5 \\ -4/5 & 3/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

prova A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & -4 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

prova B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

prova C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

prova D:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Observe que

$$T(\bar{w}_1) = \bar{w}_1 \times \bar{w}_1 = \bar{0}.$$

Temos também

$$T(\bar{w}_2) = \bar{w}_2 \times \bar{w}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1) = \bar{w}_3$$

e

$$T(\bar{w}_3) = \bar{w}_3 \times \bar{w}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-3, 0, 3) = -3\,\bar{w}_2$$

Escrevemos as coordenadas das imagens do vetores da base β na base β,

$$\big(T(w_1)\big)_\beta = (0, 0, 0), \quad \big(T(w_2)\big)_\beta = (0, 0, 1), \quad \big(T(w_3)\big)_\beta = (0, -3, 0).$$

Portanto, a matriz $[T]_\beta$ de T na base β é

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$