G4 de Álgebra Linear I – 2007.2

4 de dezembro de 2007

Gabarito

---

1) Considere as retas r_1 e r_2 de equações paramétricas

$$r_1 = \{(t,\, 2\,t,\, 1-t)\colon t \in \mathbb{R}\}, \qquad r_2 = \{(3+t,\, 5+t,\, 1+2\,t)\colon t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Determine o ponto P de interseção das retas r_1 e r_2.

b) Determine a equação cartesiana do plano π que contém as retas r_1 e r_2.

Considere agora a reta

$$r_3 = \{(t, t, a+t)\colon t \in \mathbb{R}\}.$$

c) Determinte **<u>todos</u>** os valores de a tais que as distâncias entre as retas r_1 e r_3 seja $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

Resposta:

(a) Para determinar o ponto P de interseção devemos resolver o sistema:

$$t = 3+s, \quad 2\,t = 5+s, \quad 1-t = 1+2\,s$$

Somando a primeira e a terceira equação obtemos

$$1 = 4 + 3\,s, \qquad s = -1.$$

Portanto, $t = 2$. Veja que a as soluçoes obtidas (usando somente a primeira e a terceira equação) verificam a segunda equação. Tomando $t = 2$ obtemos

$$P = (2, 4-1).$$

(b) O vetor normal n do plano π é obtido considerando o produto vetorial dos vetores diretores de r_1 e r_2, respectivamente $v_1 = (1, 2, -1)$ e $v_2 = (1, 1, 2)$. Obtemos

$$n = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (5, -3, -1).$$

Portanto a equação do plano é da forma

$$\pi\colon 5\,x - 3\,y - z = d.$$

Determinamos d escolhendo qualquer ponto das retas, por exemplo o ponto $P = (2, 4, -1)$ obtido no item precedente:

$$5\,(2) - 3\,(4) - (-1) = -1 = d.$$

Logo

$$\pi\colon 5\,x - 3\,y - z = -1.$$

(c) Observe que o produto vetorial dos vetores diretores das retas r_1 e r_3 (escolhemos o vetor diretor $v_3 = (1, 1, 1)$ de r_3) é

$$w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3, -2, -1).$$

Escolhemos dois pontos das retas r_1 e r_3, por exemplo $P_1 = (0, 0, 1) \in r_1$ e $P_3 = (0, 0, a) \in r_3$, e temos

$$\overline{P_1P_3} = (0, 0, a - 1)$$

e que a distância entre estas retas é

$$\frac{|w \cdot \overline{P_1P_3}|}{|w|} = \frac{|(3, -2, -1) \cdot (0, 0, a - 1)|}{|\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} | = \frac{|a - 1|}{\sqrt{14}}.$$

Portanto,

$$\frac{|a - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}, \qquad |a - 1| = 2.$$

Temos duas possibilidades

$$a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3 \qquad \text{e} \qquad a - 1 = -2 \Rightarrow a = -1.$$

---

2) Considere o vetor $w = (2, -1, 0)$ a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(v) = v \times w.$$

a) Determine a matriz $(T)_{\mathcal{E}}$ de T na base canônica.

b) Considere a base ortonormal de $\mathbb{R}^3$

$$\gamma = \left\{ e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2, -1, 0),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1, 2, 1),\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\,(1, 2, -5) \right\}$$

Determine a matriz $(T)_\gamma$ de T na base γ

c) Determine as coordenadas do vetor $(1, 2, 2)$ na base γ.

d) Determine um autovetor de T (escrito na base canônica).

Resposta:

(a) Para determinar $(T)_{\mathcal{E}}$ devemos calcular $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$, que serão os vetores coluna da matriz $(T)_{\mathcal{E}}$. Temos

$$T(\mathbf{i}) \quad = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -1),$$

$$T(\mathbf{j}) \quad = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -2),$$

$$T(\mathbf{k}) \quad = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 2, 0).$$

Portanto,

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Para determinar $(T)_\gamma$ devemos calcular $T(e_1)$, $T(e_2)$ e $T(e_3)$, que serão os vetores coluna da matriz $(T)_\gamma$. Temos $T(e_1) = \bar{0}$ (pois e_1 é paralelo a γ) e

$$\begin{aligned}
T(1,2,1) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,2,-5) = \sqrt{30}\, e_3, \\
T(e_2) &= \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}\, e_3 = \sqrt{5}\, e_3, \\
T(1,2,-5) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-5,-10,-5) = -5\sqrt{6}\, e_2, \\
T(e_3) &= \frac{-5\sqrt{6}}{\sqrt{30}}\, e_2 = -\sqrt{5}\, e_2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) As coordenadas do vetor $(1,2,2)$ na base γ são $(1,2,2)_\gamma = (x,y,z)$ onde

$$(1,2,2) = x\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,-1,0) + y\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,2,1) + z\,\frac{1}{\sqrt{30}}\,(1,2,-5).$$

V. pode resolver o sistema (método não recomendado) o observar que como a base γ é ortonormal se verifica

$$\begin{aligned}
x &= (1,2,2)\cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,-1,0) = 0, \\
y &= (1,2,2)\cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,2,1) = \frac{7}{\sqrt{6}}, \\
z &= (1,2,2)\cdot \frac{1}{\sqrt{30}}\,(1,2,-5) = \frac{-5}{\sqrt{30}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(1,2,2)_\gamma = \left(0, \frac{7}{\sqrt{6}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}\right)$$

(d) Como $T(2,-1,0) = \bar{0} = 0\,(2,-1,0)$, temos que $(2,-1,0)$ é um autovetor de T. De fato, o único autovalor real de T é zero e os autovetores de T são paralelos a $(2,-1,0)$.

---

3) Considere as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que 4 é um autovalor de M, Determine um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ que contenha um número máximo de autovetores linearmente independentes associados ao autovalor 4.

b) Determine explicitamente **todas** as formas diagonais de M.

Observação: para calcular os autovalores de M v. não necessita calcular seu polinômio característico.

c) Determine **explicitamente** uma matriz Q e uma matriz diagonal D tais que

$$M = Q^t\, D\, Q,$$

onde D é uma matriz diagonal.

d) Observe que a matriz N é simétrica, portanto é diagonalizável, e que um dos autovalores de N é 3. Determine se existe uma matriz P tal que

$$N = P \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Em caso afirmativo, determine **explicitamente** a matriz P. Em caso negativo, justifique de forma completa sua resposta.

Resposta:
(a) Temos que calcular os autovetores de 4, para isso devemos resolver o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 5-4 & 1 & 1 \\ 1 & 5-4 & 1 \\ 1 & 1 & 5-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o plano $\rho\colon x + y + z = 0$. Portanto, é suficiente escolher qualquer base do plano ρ. Por exemplo, $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$, mas obviamente há outras possibilidades.

(b) Como a matriz é simétrica (e portanto diagonalizável) o autovalor 4 tem multiplicidade dois.

Para determinar o outro autovalor λ usamos a fórmula do traço: soma dos autovalores com as multiplicidades igual ao traço da matriz,

$$4 + 4 + \lambda = 5 + 5 + 5 = 15.$$

Logo $\lambda = 7$.

As forma diagonais são:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Para obter a matriz Q devemos obter uma base ortonormal de autovetores. Primeiro obteremos uma base ortogonal. Sabemos que $(1, 1, 1)$ é um autovetor associado a 7: observe que, como M é simétrica, os autovetores associados a 7 devem ser perpendiculares aos autovetores associados a 4 e que estes geram o plano de vetor normal $(1, 1, 1)$. Temos que $(1, -1, 0)$ é um autovetor associado a 4. Também temos que

$$(1, 1, 1) \times (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -2)$$

é um autovetor de 4. Normalizando obtemos a base

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

As colunas de Q^t serão estes vetores (a ordem depende da forma diagonal escolhida). No nosso caso temos

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(d) Escreva

$$P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Os vetores coluna $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ da matriz P devem verificar

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Portanto, (a, b) é um autovetor associado a 3 e obtemos a equação linear

$$-a + b = 0, \quad a = b.$$

Podemos escolher o vetor $(1, 1)$. A segunda equação matrizial fica da forma

$$2\,c + d = 1 + c, \quad c + 2\,d = 1 + d.$$

Isto é, $c + d = 1$. Podemos escolher $(c, d) = (1, 0)$. Temos

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ou de forma mais geral

$$P = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & 1 - c \end{pmatrix}.$$

---

4) Determine a inversa da matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Calcularemos a inversa da matriz B usando o método de Gauss.

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2. (II)-(I) e (III)-(I):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3. troca das linhas (II) e (III):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

4. -(II):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

5. (III) + 2 (II):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

6. (I) - 2 (II):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

7. (I) - (III):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Verifique que o produto $B\,B^{-1}$ dá a identidade!