G4 de Álgebra Linear I – 2007.1

Gabarito

---

1) Considere a base η de $\mathbb{R}^3$

$$\eta = \{(1,1,1); (1,0,1); (2,1,0)\}$$

(1.a) Determine a matriz de mudança de coordenadas da base canônica para a base η.

(1.b) Considere o vetor $v = (2,3,1)$ (escrito na base canônica). Determine as coordenadas do vetor v na base η.

Resposta:

(a) Observe que a matriz de mudança de coordenadas da base η para a base canônica é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz N é a inversa de P. Calcularemos esta inversa usando o método de Gauss. Observamos que **(k)** significa a k-ésima linha:

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2. **(ii)**-**(i)** e **(iii)**-**(i)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3. -**(ii)** e $-1/2$**(iii)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix};$$

4. **(ii)**$-$**(iii)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix};$$

5. **(i)**-2**(iii)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix};$$

6. **(i)**$-$**(ii)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$N = P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) Para determinar as coordenadas de $v = (2,3,1)$ na base η é suficiente aplicar N ao vetor coluna determinado por v:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Outra possibilidade é resolver o sistema

$$(2,3,1) = x\,(1,1,1) + y\,(1,0,1) + z\,(2,1,0).$$

A solução (x,y,z) são as coordenadas de v na base η.

---

2) Considere a matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & a & d \\ 2/3 & b & f \\ 2/3 & c & -2/3 \end{pmatrix}.$$

(2.a) Determine a, b, c, d e f para que E represente na base canônica um espelhamento em uma reta.

(2.b) Determine equações cartesianas e paramétricas da reta de espelhamento.

Resposta:

(a) A matriz deve ser ortogonal e simétrica e ter traço -1 (os autovalores de um espelhamento em uma reta são 1 (simples) e -1 (de multiplicidade dois). Portanto a matriz é da forma

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & c \\ 2/3 & c & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, as duas primeiras colunas devem ser ortogonais,

$$(1/3, 2/3, 2/3) \cdot (2/3, -2/3, c) = 0, \quad -2/9 = 2\,c/3, \quad c = 1/3.$$

Logo a matriz é

$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

(b) A reta de espelhamento e a reta que corresponde aos autovetores associados a 1. Ou seja, devemos resolver,

$$\begin{pmatrix} 1/3-1 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3-1 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtendo

$$-x + y + z = 0, \quad 2\,x - 5\,y + z = 0, \quad 2\,x + y - 5\,z = 0.$$

Temos que como a solução é uma reta, para obter uma equação cartesiana é suficiente considerar duas das equações acima (por exemplo).

Um vetor normal da reta é $(-1,1,1) \times (2,-5,1) = (6,3,3)$. Podemos escolher o vetor diretor $(2,1,1)$. Como esta reta contém a origem, obtemos as equações paramétricas

$$x = 2\,t, \quad y = t, \quad z = t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

---

3) Considere o vetor $w = (1,1,2)$ e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(v) = v \times w.$$

(3.a) Determine a matriz $[T]_{\mathcal{E}}$ da transformação linear T na base canônica.

(3.b) Considere a base ortonormal

$$\gamma = \{(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}); (2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5}); (1/\sqrt{30}, -5/\sqrt{30}, 2/\sqrt{30})\}.$$

Determine a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ.

(3.c) Determine explicitamente uma matriz N que verifique

$$[T]_{\mathcal{E}} = N^{-1}\,[T]_\gamma\,N.$$

(3.d) Determine a segunda coordenada do vetor $(2,1,1)$ na base γ.

Resposta:

(a) Devemos determinar $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$, que serão as colunas da matriz $[T]_{\mathcal{E}}$. Temos

$$T(\mathbf{i}) = (1,0,0) \times (1,1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0,-2,1),$$

$$T(\mathbf{j}) = (0,1,0) \times (1,1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2,0,-1),$$

$$T(\mathbf{k}) = (0,0,1) \times (1,1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1,1,0).$$

Portanto,

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Escrevemos

$$\begin{aligned} v_1 &= (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), \\ v_2 &= (2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5}), \\ v_3 &= (1/\sqrt{30}, -5/\sqrt{30}, 2/\sqrt{30}). \end{aligned}$$

Temos

$$T(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) = (1/\sqrt{6})\,(1,1,2) \times (1,1,2) = (0,0,0),$$

$$\begin{aligned} T(2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5}) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,0,-1) \times (1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,(1,-5,2) = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5}}\, v_3 = \sqrt{6}\, v_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(1/\sqrt{30}, -5/\sqrt{30}, 2/\sqrt{30}) &= \frac{1}{\sqrt{30}}\,(1,-5,2) \times (1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}}\,(-12,0,6) = -\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{30}}\, v_2 = -\sqrt{6}\, v_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} \\ 0 & +\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) A matriz N^{-1} é a matriz de mudança de base da base γ para a base canônica. Portanto,

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & -5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

Como a base é ortonormal a matriz N é ortogonal, portanto N é a transposta de N^{-1}:

$$N = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

(d) Para determinar a segunda coordenada de $(2, 1, 1)$ na base γ podemos usar dois métodos. Escrevemos

$$(2, 1, 1) = a\, v_1 + b\, v_2 + c\, v_3$$

e queremos determinar b. Portanto,

$$(2, 1, 1) \cdot v_2 = a\, (v_1 \cdot v_2) + b\, (v_2 \cdot v_2) + c\, (v_3 \cdot v_2) = b,$$

pois $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal. Portanto,

$$b = (2, 1, 1) \cdot (2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5}) = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Outra possibilidade é usar a matriz de mudança de base da base canônica para a base γ dada pela matriz N, então

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{5} & 0 & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{30} & -5/\sqrt{30} & 2/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/\sqrt{6} \\ 3/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

---

4) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determine:

(4.a) uma base de autovetores de M,

(4.b) uma forma diagonal D de M,

(4.c) uma matriz Q tal que

$$M = Q\, D\, Q^t,$$

onde D é a matriz do item anterior,

(4.d) a equação cartesiana da imagem de M denotada $\mathrm{im}(M)$,

$$\mathrm{im}(M) = \{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } M(w) = u\}.$$

Resposta:

(a) Calcularemos primeiro os autovalores de M.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)\,(10 - 7\,\lambda + \lambda^2 - 4) +$$

$$+2\,(-10 + 2\,\lambda - 2) - (4 + 2 - \lambda) =$$

$$= (5-\lambda)\,(\lambda^2 - 7\,\lambda + 6) - 24 + 4\,\lambda - 6 + \lambda =$$

$$= (5-\lambda)\,(\lambda^2 - 7\,\lambda + 6) - 30 + 5\,\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 12\,\lambda^2 - 41\,\lambda + 30 - 30 + 5\,\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 12\,\lambda^2 - 36\,\lambda = -\lambda\,(\lambda^2 - 12\,\lambda + 36).$$

Logo as raizes são $\lambda = 0$ e

$$\frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = 6.$$

Portanto, os autovalores são 0 (simples) e 6 (de multiplicidade dois).

Obtemos os autovetores de 6 resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} 5-6 & -2 & -1 \\ -2 & 2-6 & -2 \\ -1 & -2 & 5-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$-x - 2\,y - z = 0, \quad -2\,x - 4\,y - 2\,z = 0, \quad -x - 2\,y - z = 0.$$

Obtemos três vezes a mesma equação. Portanto, os autovetores associados a 6 são os vetores não nulos do plano

$$\pi\colon x + 2\,y + z = 0.$$

Como a matriz é simétrica, os autovetores associados a 0 são ortogonais aos autovetores de 6. Portanto, $(1,2,1)$ é um autovetor associado a 0. V. também pode resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 5-0 & -2 & -1 \\ -2 & 2-0 & -2 \\ -1 & -2 & 5-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, é suficiente escolher dois vetores linearmente independentes de π e o vetor $(1,2,1)$. Observe que podemos escolher uma base ortonormal de autovetores, por exemplo $(1,0,-1)$, $(1,0,-1) \times (1,2,1) = (2,-2,2)$ (estes dois vetores associados a 6) e $(1,2,1)$. Normalizando obtemos

$$\gamma = \{(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})); (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})\}.$$

(b) Uma forma diagonal D é, por exemplo,

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) A matriz Q é uma matriz ortogonal cujas colunas são autovetores associados a 6 (as duas primeiras) e a 0 (a última). Esta base já foi calculada no item (a):

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

(d) A imagem de M é gerada pelos vetores $M(\mathbf{i}) = (5,-2,-1)$, $M(\mathbf{j}) = (-2,2,-2)$ e $M(\mathbf{k}) = (-1,-2,5)$. Observe que os dois primeiros vetores geram o plano cujo vetor normal é

$$(5,-2,-1) \times (1,-1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-6,-3).$$

Isto é, o plano ρ de equação cartesiana

$$\rho\colon x + 2\,y + z = 0.$$

Observe que o vetor $M(\mathbf{k}) = (-1,-2,5)$ pertence ao plano ρ. Logo a equação cartesiana da imagem de M é

$$\rho\colon x + 2\,y + z = 0.$$