G4 de Álgebra Linear I – 2006.2

Data: 30 de novembro de 2006

Gabarito

---

1) Considere o plano $\pi\colon x+y+z=0$, o ponto $p=(1,1,1)$ e as retas

$$r_1=(t,1-t,t), \qquad t\in\mathbb{R} \quad \text{e} \qquad r_2=(1-t,1+t,t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Determine

(1.a) A equação paramétrica da reta r que contém o ponto p e é perpendicular a π.

(1.b) A equação cartesiana do plano ρ que contém o ponto p e é paralelo a r_1 e r_2.

(1.c) A distância entre as retas r_1 e r_2 e sua posição relativa.

(1.d) Escreva a reta r_1 como a interseção de dois planos τ e κ (escritos na forma cartesiana) tais que τ é paralelo ao eixo $\mathbb{X}$ (isto é, o vetor normal do plano τ é ortogonal ao vetor $\mathbf{i}$) e κ é paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$ (isto é, o vetor normal do plano κ é ortogonal ao vetor $\mathbf{k}$).

Resposta:

1.a) O vetor diretor da reta r é o vetor normal do plano, $(1,1,1)$. Um ponto de r é $(1,1,1)$. Logo uma equação paramétrica é

$$r\colon (1+t,1+t,1+t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

1.b) Os vetores diretores das retas $(1,-1,1)$ e $(-1,1,1)$ são vetores paralelos ao plano ρ. Logo um vetor normal n do plano é

$$n=(1,-1,1)\times(-1,1,1)=(-2,-2,0).$$

Logo o plano é da forma $\rho\colon x+y=d$, onde d é determinado pela condição $(1,1,1)\in\rho$, ou seja, $d=1+1=2$. Logo,

$$\rho\colon x+y=2.$$

1.c) Para calcular a distância entre as retas consideramos os pontos $P=(0,1,0)\in r_1$ e $Q=(1,1,0)\in r_2$ e o vetor $\overline{PQ}=(1,0,0)$. A distância entre as retas é

$$\frac{|(1,0,0)\cdot((1,-1,1)\times(-1,1,1))|}{||(1,-1,1)\times(-1,1,1)||}=\frac{|(1,0,0)\cdot(-2,-2,0)|}{||(-2,-2,0)||}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Este cálculo mostra que as retas são reversas. Elas não são paralelas (pois os vetores diretores não são proporcionais). Logo ou são reversas ou se interceptam em um ponto (neste último caso a distância seria 0).

1.d) O plano τ é paralelo ao vetor diretor de r_1, o vetor $(1,-1,1)$) e ao vetor $(1,0,0)$. Logo um vetor normal de τ é

$$(1,-1,1)\times(1,0,0)=(0,1,1).$$

Logo τ é da forma

$$\tau\colon y+z=d.$$

Obtemos d pela condição $(0,1,0)\in\tau$. Isto é

$$\tau\colon y+z=1.$$

Analogamente, o plano κ é paralelo ao vetor diretor de r_1, o vetor $(1,-1,1)$, e ao vetor $(0,0,1)$. Logo um vetor normal de κ é

$$(1,-1,1)\times(0,0,1)=(-1,-1,0).$$

Logo κ é da forma

$$\kappa\colon x+y=d.$$

Obtemos d pela condição $(0,1,0)\in\tau$. Isto é

$$\kappa\colon x+y=1.$$

2) Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$A(1,1,-1) = (-1,2,3),\ A(1,-2,-1) = (-4,2,0),\ A(1,0,1) = (2,0,2).$$

2.a) Sabemos também que

$$A(1,0,0) = (0,1,2).$$

Determine a matriz $[A]_{\mathcal{E}}$ de A na base canônica.

2.b) Considere a base ortogonal

$$\beta = \{(1,1,-1);(1,-2,-1);(1,0,1)\}$$

Determine a primeira coluna da matriz $[A]_\beta$ de A na base β.

2.c) Sabendo que o determinante de A é zero. Estude se A é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma forma diagonal D de A e uma base γ onde a matriz $[A]_\gamma$ de A na base γ seja diagonal.

2.d) Determine a equação cartesiana do conjunto imagem de A (isto é, do conjunto de vetores w tais que $w = A(v)$ para certo vetor v).

Resposta:
2.a) Observe que como $A(1,0,0) = (0,1,2)$ e $A(1,0,1) = (2,0,2)$ temos

$$\begin{aligned} A(0,0,1) &= A((1,0,1)-(1,0,0)) = A(1,0,1) - A(1,0,0) = \\ &= (2,0,2)-(0,1,2) = (2,-1,0). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} A(0,1,0) &= A((1,1,-1)-(1,0,0)+(0,0,1)) = \\ &= A(1,1,-1) - A(1,0,0) + A(0,0,1) = \\ &= (-1,2,3)-(0,1,2)+(2,-1,0) = (1,0,1). \end{aligned}$$

Portanto, a matriz de A na base canônica é

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique que este resultado é compatível com as condições $A = (1,1,-1) = (-1,2,3)$, $A(1,-2,-1) = (-4,2,0)$ e $A(1,0,1) = (2,0,2)$ do enunciado.

2.b) Devemos escrever o vetor $A(1,1,-1)$ na base ortogonal β,

$$A(1,1,-1) = (-1,2,3) = a\,(1,1,-1) + b\,(1,-2,-1) + c\,(1,0,1).$$

Como a base é ortogonal temos que

$$(-1,2,3)\cdot(1,1,-1) = a\,(1,1,-1)\cdot(1,1,-1), \quad -2 = 3\,a, \quad a = -2/3;$$

$$(-1,2,3)\cdot(1,-2,-1) = b\,(1,-2,-1)\cdot(1,-2,-1), \quad -8 = 6\,b, \quad b = -4/3;$$

$$(-1,2,3)\cdot(1,0,1) = c\,(1,0,1)\cdot(1,0,1), \quad 2 = 2\,c, \quad c = 1.$$

Portanto,

$$[A]_\beta = \begin{pmatrix} -2/3 & x_1 & y_1 \\ -4/3 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

2.c) Para ver se A é diagonalizável devemos determinar seus autovalores e ver se existe uma base de autovetores. Como o determinante de A é zero, necessariamente existe um autovalor igual a zero. Observe que $A(1,0,1) = (2,0,2)$. Logo 2 é uma autovalor. Finalmente, como o traço de A é 0, se λ é o terceiro autovalor temos

$$0 = 0 + 2 + \lambda, \quad \lambda = -2.$$

Portanto, os autovalores de A são todos diferentes e assim A é diagonalizável. Uma forma diagonal é

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

A base $\gamma = \{u, v, w\}$ deve verificar que $A(u) = \bar{0}$ (isto é, u é um autovetor associado a 0), $A(v) = 2\,v$ (isto é, v é um autovetor associado a 2, por exemplo $(1,0,1)$) e $A(w) = -2\,w$ (isto é, w é um autovetor associado a -2).

Para determinar um autovetor u associado a 0 resolvemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$x = z, \quad y = -2\,z.$$

Logo podemos escolher $v = (1, -2, 1)$.

Finalmente, para determinar um autovetor w associado a -2 resolvemos

$$\begin{pmatrix} 0-(-2) & 1 & 2 \\ 1 & 0-(-2) & -1 \\ 2 & 1 & 0-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Isto é,

$$2\,x + y + 2\,z = 0, \quad x + 2\,y - z = 0.$$

Isto é

$$4\,x + 5\,y = 0, \quad x = -(5/4)\,y.$$

Portanto,

$$-(5/4)\,y + 2\,y - z = 0, \quad z = (3/4)\,y.$$

Uma solução é $w = (-5, 4, 3)$. Portanto

$$\gamma = \{(1, -2, 1); (1, 0, 1); (-5, 4, 3)\}$$

2.d) A imagem de A está gerada pelos vetores $A(1, 0, 0)$, $A(0, 1, 0)$ e $A(0, 0, 1)$ (ou de forma análoga, pelos vetores $A(1, 1, -1), A(1, -2, -1)$ e $A(1, 0, 1)$). Estes vetores são

$$(0, 1, 2), \quad (1, 0, 1), \quad (2, -1, 0).$$

O espaço gerado por $(0, 1, 2)$ e $(1, 0, 1)$ é o plano vetorial de vetor normal

$$(0, 1, 2) \times (1, 0, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, -1).$$

Portanto, trata-se do plano

$$\rho \colon x + 2\,y - z = 0.$$

Como o vetor $(2, 0, 2)$ pertence a este plano, a equação cartesiana da imagem é exatamente $x + 2\,y - z = 0$.

3)

3.a) O produto de matrizes abaixo representa (na base canônica) uma projeção P.

$$P = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}, \qquad \text{onde} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a equação cartesiana do plano π de projeção e um vetor v que determina a direção de projeção.

3.b) Determine <u>explicitamente</u> a matriz de P na base canônica.

3.c) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ obtida como a composição da projeção ortogonal no plano π e o espelhamento no plano ρ, onde

$$\pi\colon x + y - 2\,z = 0, \qquad \rho\colon x + y + z = 0.$$

Encontre uma matriz R tal que a matriz de T na base canônica seja o produto

$$[T]_{\mathcal{E}} = R \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^t.$$

Resposta:

3.a) Sejam u, v e w os vetores coluna da matriz M e considere a base $\gamma = \{u, v, w\}$. Temos que a matriz de P na base γ é

$$[P]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, u e w são autovetores associados a 1 e geram o plano π de projeção. Analogamente, v é um autovetor associado a 0, que determina a direção de projeção. Logo devemos calcular a matriz M inversa de M^{-1}. Para calcular a inversa utilizaremos o método de escalonamento:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Logo a direção de projeção é $(2, -1, -1)$ e o plano de projeção π está gerado pelos vetores $(1, 1, 1)$ e $(1, -2, 1)$. Logo seu vetor normal é

$$(1, 1, 1) \times (1, -2, 1) = (3, 0, -3),$$

e

$$\pi\colon x - z = 0.$$

3.b) Determinaremos o produto das matrizes que determinam P.

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1 & -1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.c) Observe que os planos π e ρ são ortogonais (seus vetores normais são perpendiculares). Considere a base ortogonal

$$\eta = \{(1,1,1); (1,1,-2), (1,1-2) \times (1,1,1) = (3,-3,0)\}$$

Sejam Q a projeção e E o espelhamento. Na base η temos,

$$[Q]_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad [E]_\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, como $T = E \circ Q = Q \circ E$ (neste caso a composição é comutativa) temos

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta afirmação também vale para a base ξ obtida normalizando η. Observe que a base assim obtida é a base ortonormal

$$\xi = \left\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}); (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\right\}.$$

Seja R a matriz ortogonal cujas colunas são os vetores da base ξ. Logo $R^{-1} = R^t$. Observando que R^t é a matriz de mudança de base da canônica à base ξ e que R é a matriz de mudança de base da base ξ à canônica, temos

$$[T]_{\mathcal{E}} = R\ [T]_{\xi}\ R^t = R \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R^t.$$

Portanto,

$$R = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}.$$