G4 de Álgebra Linear I – 2006.1

Gabarito

---

1) Considere a reta

$$r = (1 + t, 1 - t, 2\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e o ponto

$$Q = (1, 0, 2).$$

(a) Escreva a reta r como a interseção de dois planos π e ρ (<u>escritos na forma cartesiana</u>) tais que π é paralelo ao eixo $\mathbb{Y}$ (isto é, o vetor normal do plano π é ortogonal ao vetor $\mathbf{j}$) e ρ é paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$ (isto é, o vetor normal do plano ρ é ortogonal ao vetor $\mathbf{k}$).

(b) Determine a equação cartesiana do plano τ que contém a reta r e o ponto Q.

(c) Determine a distância do ponto Q à reta r.

(d) Determine um ponto M da reta r tal que os pontos $P = (1, 1, 0)$, Q e M formem um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento PQ. (Observe que P está na reta r).

Resposta:

a) Observe que um vetor diretor da reta r é $v = (1, -1, 2)$. Como o plano π contém a reta r e é paralelo ao eixo $\mathbb{Y}$, seu vetor normal é da forma

$$(1, -1, 2) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 0, 1).$$

Portanto, a equação cartesiana de π é da forma

$$\pi\colon 2\,x - z = d.$$

Finalmente, como o ponto $(1,1,0)$ da reta pertence a π obtemos $d = 2$. Logo,

$$\pi\colon 2\,x - z = 2.$$

Analogamente, como o plano ρ contém a reta r e é paralelo ao eixo $\mathbb{Z}$, seu vetor normal é da forma

$$(1,-1,2) \times (0,0,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,0).$$

Portanto, a equação cartesiana de ρ é da forma

$$\rho\colon x + y = d.$$

Finalmente, como o ponto $(1,1,0)$ da reta pertence a ρ obtemos $d = 2$. Logo,

$$\rho\colon x + y = 2.$$

Portanto, a equação cartesiana é

$$r\colon 2\,x - z = 2, \quad x + y = 2.$$

b) Para determinar a equação cartesiana de τ observamos que o vetor normal de τ é

$$(1,-1,2) \times (0,-1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (0,-2,-1).$$

Logo a equação cartesiana é da forma

$$2\,y + z = d.$$

Como $(1,1,0)$ deve verificar a equação, temos $d = 2$. Logo

$$\tau\colon 2\,y + z = 2.$$

c) Determinaremos esta distância usando dois métodos.

Primeiro determinaremos o plano η que contém o ponto Q e é perpendicular a r. A interseção deste plano e da reta determina o ponto A de r mais próximo de Q. A distância é o módulo do vetor AQ. Observe que o ponto A é exatamente o ponto M do próximo item.

O vetor normal de η é o vetor diretor de r. Logo η é da forma

$$\eta\colon x - y + 2\,z = d.$$

Como o ponto Q pertence a η:

$$1 + 2 = d = 3.$$

Portanto,

$$\eta\colon x - y + 2\,z = 5.$$

Para determinar o ponto de interseção da reta e o plano devemos ver para que valor de t se verifica

$$1 + t - (1 - t) + 2\,(2\,t) = 5, \quad 6\,t = 5, \quad t = 5/6.$$

Logo

$$A = (11/6, 1/6, 10/6).$$

temos

$$\overline{QA} = \frac{1}{6}\,(5, 1, -2).$$

Veja que este vetor é perpendicular ao vetor diretor de r. A distância é o módulo de $\overline{QA}$,

$$\text{distância} = |\overline{QA}| = \frac{1}{6}\,\sqrt{25 + 1 + 4} = \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

O segundo método consiste em considerar o paralelogramo cujas arestas são os vetores v (diretor da reta) e $\overline{PQ}$. Então a distância é

$$\text{distância} = \frac{|v \times \overline{PQ}|}{|v|}.$$

Temos

$$|v| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

Temos que

$$v \times \overline{PQ} = (1, -1, 2) \times (0, -1, 2) = (0, -2, -1)$$

(este cálculo já foi feito). Portanto, $|v \times \overline{PQ}| = \sqrt{5}$. Assim,

$$\text{distância} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}.$$

d) Já observamos que $A = M = (11/6, 1/2, 2/6)$.

---

2) Considere a transformação linear

$$T,\ L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cuja matriz na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine a equação cartesiana da imagem de T.

(b) Determine uma base da imagem de T.

(c) Determine o conjunto de vetores v tais que $T(v) = \bar{0}$.

(d) Determine os autovalores de T com suas multiplicidades.

(e) Determine duas formas diagonais diferentes de T.

Resposta:

a) A imagem de T está gerada pelos vetores

$$T(\mathbf{i}) = (0, -2, 2), \quad T(\mathbf{j}) = (1, 4, -5), \quad T(\mathbf{k}) = (-1, -2, 3).$$

Como os vetores $(0, -2, 2)$ e $(1, 4, -5)$ não são paralelos, eles geram o plano cujo vetor normal é

$$(0, -2, 2) \times (1, 4, -5) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (2, 2, 2).$$

Isto é, eles geram o plano

$$\pi\colon x + y + z = 0.$$

Como o vetor $T(\mathbf{k})$ pertence ao plano π,

$$(-1) + (-2) + 3 = 0,$$

obtemos que a equação cartesiana da imagem de T é

$$\text{imagem}(T)\colon x + y + z = 0.$$

b) Uma base β da imagem de T é dada pelos vetores

$$\beta = \{T(\mathbf{i}) = (0, -2, 2); T(\mathbf{j}) = (1, 4, -5)\}.$$

De fato, v. pode escolher como base qualquer par de vetores linearmente independentes do plano π.

c) Devemos resolver a equação

$$T(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$y - z = 0, \quad -2\,x + 4\,y - 2\,z = 0, \quad 2\,x - 5\,y + 3\,z = 0.$$

Obtemos (da primeira equação) $y = z$ e (substituindo $z = y$ na segunda equação) $x = y$. Logo os vetores são da forma (t, t, t). Veja que a terceira equação é satisfeita.

Portanto,

$$T(v) = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad v = (t, t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

d) Para calcular os autovetores de T e suas multiplicidades devemos considerar seu polinômio característico. Em qualquer caso, observe que já sabemos que 0 é um autovalor (ainda não sabemos sua multiplicidade). O polinômio característico de T é

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 2 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$- \begin{vmatrix} -2 & 4-\lambda \\ 2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda\,(\lambda^2 - 7\,\lambda + 2) - (-2 + 2\,\lambda) - (2 + 2\,\lambda) =$$

$$= -\lambda\,(\lambda^2 - 7\,\lambda + 6).$$

Logo as raizes são

$$\lambda = 0, \qquad \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}.$$

Portanto os autovalores são

$$0, \quad 6, \quad 1.$$

todos simples

e) As seis formas diagonais de T são:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

---

3) Considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(u) = (1, 0, -1) \times u$$

e a base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}); (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})\}.$$

a) Determine a matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

b) A transformação linear T é a composição de uma projeção ortogonal P, uma rotação R e a multiplicação por um escalar λ. Determine

- a equação cartesiana do plano ou a reta de projeção de P,
- a equação paramétrica do eixo de rotação de R,
- o fator de multiplicação λ.

c) Determine explicitamente matrizes P e P^{-1} tais que a matriz $[T]_{\mathcal{E}}$ de T na base canônica se escreva como o produto

$$[T]_{\mathcal{E}} = P\,[T]_\beta\,P^{-1}.$$

Resposta:

a) Escrevemos,

$$u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); \quad v = (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}); \quad w = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}).$$

Observe que

$$\begin{aligned} T(u) &= T(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = (1/\sqrt{3})\,((1,0,-1)\times(1,1,1)) = \\ &= (1/\sqrt{3})\,(1,-2,1) = \\ &= \sqrt{2}\,(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) = \sqrt{2}\,v; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) = (1/\sqrt{6})\,((1,0,-1)\times(1,-2,1)) = \\ &= (2/\sqrt{6})\,(-1,1,-1) = \\ &= -\sqrt{2}\,(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = -\sqrt{2}\,u; \end{aligned}$$

$$T(w) = T(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2})\,((1,0,-1)\times(1,0,-1)) = \bar{0}.$$

Portanto, a matriz de T na base β é:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Finalmente, na base β temos

$$\begin{aligned} [T]_\beta &= \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

As matrizes acima representam (na base β) respetivamente (de esquerda à direita):

- A projeção no plano gerado pelos dois primeiros vetores da base β (os vetores u e v) na direção do terceiro vetor da base (o vetor w). Como estes vetores são ortogonais, temos que aprojeção ortogonal no plano $x - z = 0$ (o vetor normal do plano é o vetor w).
- Uma rotação de eixo $(t, 0, -t)$ e ângulo $\pi/2$
- uma multiplicação por $\sqrt{2}$.

c) Observe que

$$[T]_{\mathcal{E}} = P\,[T]_\beta\,P^{-1},$$

onde P é a matriz de mudança de base da base β à base canônica. Portanto,

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Como a matriz P é ortogonal (sua colunas são os vetores da base ortonormal β), temos

$$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$