G4 de Álgebra Linear I – 2013.1

28 de junho de 2013.

Gabarito

---

(1) Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - 2y + z &= a, \\ \quad x - z &= 0, \\ x + ay + z &= b, \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que o sistema é possível e determinado para $a \neq -2$.

Escalonando o sistema com as operações elementares, $L_3 - L_1$ e $L_2 - L_1$, encontramos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - 2y + z &= a, \\ \quad 2y - 2z &= -a, \\ \quad (a+2)y &= b - a, \end{cases}$$

Assim se $a \neq -2$ temos que

$$y = \frac{b-a}{a+2}.$$

Temos também

$$x = a + 2y - z$$

e como $x = z$ obtemos

$$x = z = \frac{a+2y}{2},$$

obtendo um sistema possível e determinado.

(b) Faça $a = -2$. Determine, se possível, os valores de b para que as soluções do sistema formem um plano de $\mathbb{R}^3$.

Usando o sistema escalonado do ítem anterior temos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & -2, \\ 2y - 2z & = & 2, \\ 0y & = & b + 2, \end{array}\right.$$

Teremos duas possibilidades:
- Sistema impossível se $b \neq -2$.
- Se $b = -2$ o sistema será indeterminado e terá como solução uma reta, de fato

$$x = t - 3, \quad y = t, \quad z = t - 1.$$

Logo não existe nenhum valor de b para o quals as soluções do sistema formem um plano de $\mathbb{R}^3$.

Podemos também perceber que o sistema com $a = -2$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & -2, \\ x - z & = & 0, \\ x - 2y + z & = & b, \end{array}\right.$$

representa dois planos paralelos e coincidentes (no caso de $b = -2$) interceptados pelo terceiro plano ao longo de uma reta.

---

(2) Considere a base γ de $\mathbb{R}^3$

$$\gamma = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, -1)\}$$

e a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\begin{aligned} T(1,0,1) &= (0,0,0), \\ T(0,1,0) &= (0,1,0), \\ T(1,0,-1) &= (1,0,-1). \end{aligned}$$

(a) Mostre que γ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Como temos três vetores de $\mathbb{R}^3$ podemos fazer o produto misto e verificar se os vetores geram o $\mathbb{R}^3$ e são linearmente independentes.

$$(1,0,1) \cdot (0,1,0) \times (1,0,-1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Logo como o produto misto é diferente de 0 e os vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determine a equação cartesiana da imagem de T,

$$\text{imagem}(T) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

O espaço imagem é gerado pelas imagens dos vetores de uma base. Escolhendo a base γ temos que a imagem é gerada por $(0,1,0)$ e $(1,0,-1)$. Logo a imagem é um plano cujo vetor normal é

$$(0,1,0) \times (1,0,-1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,0,-1).$$

Logo a imagem da tranformação é o plano $\pi : x + z = 0$.

(c) Determine uma base ortonormal η do conjunto imagem de T. Escreva as coordenadas do vetor $(1, 1, -1)$ da imagem de T na base η. Escreva, se possível, as coordenadas do vetor $(0, 1, 1)$ na base η.

Uma base ortonormal do conjunto imagem é formada por dois vetores não paralelos ortogonais do plano $x + z = 0$. Podemos escolher então a base

$$\eta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0, 1, 0) \right\},$$

As coordenadas (a, b) do vetor $(1, 1, -1)$ na base η verificam

$$(1, 1, -1) = a \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + b\,(0, 1, 0).$$

Como a base é ortonormal temos que

$$a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot (1, 1, -1) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

e

$$b = (0, 1, 0) \cdot (1, 1, -1) = 1.$$

Assim $(1, 1, -1)_\eta = (\frac{2}{\sqrt{2}}, 1))$.

Observe que o vetor $(0, 1, 1)$ não pertence ao plano π $(1 \neq 0)$. Logo não podemos escrever o vetor na base η. De fato, se v. tenta escrever o vetor $(0, 1, 1)$ na base η obterá um sistema impossível: não existem (x, y) tais que

$$(0, 1, 1) = x \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + y\,(0, 1, 0).$$

(d) Encontre uma base β ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores da transformação linear T.

Note que os vetores da base γ são de fato autovetores de T e são ortogonais. Logo é suficiente normalizar esta base:

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\},$$

(e) Determine a matriz $[T]_\beta$ da tranformação linear T na base β.

A base β está formada por três autovetores associados a $0, 1$ e 1 (nessa ordem). Logo a matriz na base β é uma matriz diagonal $[D]$ formada pelos autovalores de $[T]$:

$$[T]_\beta = [D] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) Determine a matriz $[Q]$ de mudança de base da base canônica para a base β do item (d).

Como já dito anteriormente a transformação é ortogonalmente diagonalizável (possui uma base ortogonal de autovetores) logo a matriz ortogonal $[P]$, onde as colunas são os vetores da base β, é a matriz de mudança de base da base β para a canônica. Assim a matriz $[P]$ de mudançade base da base canônica para a base β é a matriz $[Q] = [P]^{-1} = [P]^t$ (a última afirmação segue da orgonalidade de $[P]$),

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

---

(3) Considere a matriz $[N]$

$$[N] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Sabendo que $\lambda = 4$ é um autovalor de $[N]$, determine todos os autovalores de $[N]$ e suas multiplicidades.

Temos que o traço de $[N]$ (que é a soma dos autovalores) é traço$[N] = 6$ e o determinante de $[N]$ (que é o produto dos autovalores) é $\det[N] = 4$. Temos então:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 4 = 6, \\ \lambda_1 \, \lambda_2 \, 4 = 4, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2, \\ \lambda_1 \, \lambda_2 = 1, \end{cases}$$

Fazendo $\lambda_1 = (2 - \lambda_1)$ temos

$$(2 - \lambda_2)\,(\lambda_2) = 2, \qquad \lambda_2^2 - 2\lambda_2 + 1 = 0, \qquad (\lambda_2 - 1)^2 = 0.$$

Assim $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_1 = 2 - 1 = 1$. Portanto, os autovalores são

$$1\,(\text{duplo}) \qquad \text{e} \qquad 4.$$

b) Determine, se possível, uma base ortonormal β de autovetores de $[N]$.

Como a matriz é simétirca temos que existe uma base ortonormal de autovetores. Calculando os autovetores de $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = x, \\ x + 2y + z = y, \\ x + y + 2z = z. \end{cases}$$

Temos então:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Logo os autovetores associados ao autovalor 1 são os vetores não nulos do plano $\pi : x + y + z = 0$.

Como a matriz é simétrica os autovetores de $\lambda = 4$ são ortogonais aos autovetores de 1, portant perpendiculares ao plano $x + y + z = 0$. Logo são paralelos a $(1, 1, 1)$. V. também pode resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4x, \\ x + 2y + z = 4y, \\ x + y + 2z = 4z. \end{cases}$$

Temos então:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \\ x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Escalonando:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ -3y + 3z = 0, \\ 3y - 3z = 0. \end{cases}$$

Logo os autovetores associados ao autovalor 4 são os vetores não nulos da forma (t, t, t).

Temos então um autovetor associado 4 é $(1, 1, 1)$ (que é o vetor perpendicular ao plano π). Também temos que 1 é um autovalor (multiplicidade álgebrica 2) e os vetores do plano π não nulos são seus autovetores. Assim, $(1, 0, -1)$ é um autovetor

$$\bar{u} = (1, 1, 1) \times (1, 0, -1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1).$$

é outro autovetor associado a 1.

Uma base ortonormal β formada por autovetores de T é

$$\beta = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

c) Determine uma matriz $[D]$ diagonal e uma matriz $[P]$ tais que

$$[N] = [P]\,[D]\,[P]^t.$$

Como já dito a matriz é simétrica, logo ortogonalmente diagonalizável. Temos então a matriz $[D]$ diagonal formada de autovalores e a matriz $[P]$ uma matriz ortogonal onde as colunas são os vetores da base β ortonormal de autovetores (já encontrada no ítem anterior).

$$[D] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[P] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

d) Considere a matriz $[M] = [N]^{-1}$, a matriz inversa de $[N]$. Escreva $[M]$ da forma

$$[M] = [Q]\,[E]\,[Q]^{-1},$$

onde $[E]$ é uma matriz diagonal.

Como já sabemos temos que

$$[N] = [P]\,[D]\,[P]^{-1}$$

A inversa será:

$$[N]^{-1} = ([P]\,[D]\,[P]^{-1})^{-1}, \qquad [N]^{-1} = ([P]^{-1})^{-1}\,([P][D])^{-1},$$

logo

$$[N]^{-1} = [P]\,[D]^{-1}\,[P]^{-1}$$

Como [D] é uma matriz diagonal temos que:

$$[D]^{-1} = [E] = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Também temos

$$[Q] = [P] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

e) Considere a matriz $[L]$

$$[L] = \begin{bmatrix} 222 & 22 & 2 \\ 111 & 11 & 1 \\ 333 & 33 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine todos os autovalores de $[L]$. Determine também um autovalor de $[L]^7$.

O determinante da matriz $\det[L] = 0$, pois as linhas (colunas) são proporcionais. Logo temos um autovalor ($\lambda = 0$). Calculamos os autovetores associados a $\lambda = 0$,

$$\begin{pmatrix} 222 & 22 & 2 \\ 111 & 11 & 1 \\ 333 & 33 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 222x + 22y + 2z = 0 \\ 111x + 11y + 1z = 0 \\ 333x + 33y + 3z = 0 \end{array} \right.$$

Temos então um plano como solução

$$111\,x + 11\,y + z = 0.$$

Logo os autovetores associados ao autovalor 0 são os vetores não nulos do plano $\pi : 111\,x + 11\,y + z = 0$. Assim a multiplicidade algébrica de $\lambda = 0$ é 2 ou 3. Se fosse 3 o traço de $[L]$ seria 0, logo a multiplicidade é dois. Se λ é o outro autovalor, usando o traço temos:

$$0 + 0 + \lambda = 236$$

Assim $\lambda = 236$ com multiplicidade algébrica 1.

Como a matriz $[L]$ é diagonalizável, pois temos autovalores de multiplicidade algébrica 2 e geomé trica 2 (achamos os autovetores associados a 2 como vetores do plano) temos que:

$$[L]^7 = [P]\,[D]^7\,[P]^{-1}, \quad [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 236 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de $[L]^7$ são as entradas da matriz diagonal

$$[D]^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 236^7 \end{bmatrix}.$$

Como apenas estamos interessados em um autovalor uma possibilidade é observar que se $\overrightarrow{u}$ é uma autovetor associado a 0 de $[L]$ então

$$[L]^7\overrightarrow{u} = [L]^6\,[L]\,\overrightarrow{u} = [L]^6\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

Logo 0 é um autovetor de $[L]^7$.

---

(4) Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) Uma matriz inversível não pode ser semelhante a uma matriz não inversível.

Verdade. Duas matrizes semelhantes têm o mesmo determinante. Assim se uma matriz $[A]$ é inversível então $\det[A] \neq 0$. Se uma matriz $[B]$ é não inversível então $\det[B] = 0$. Portanto, têm determinantes diferentes e não podem ser semelhantes.

b) Seja A uma matriz de 2×2. Se A é semelhante a $-A$, então o único autovalor de A é zero.

Falso. É suficiente considerar as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz de semelhança é

$$[S] = [S]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que $[S]$ é a matriz que leva um autovetor associado a 1 de A (o vetor $\mathbf{i}$) a um autovetor associado a 1 de $-A$ (o vetor $\mathbf{j}$) e um autovetor associado a -1 de A (o vetor $\mathbf{j}$) a um autovetor associado a -1 de $-A$ (o vetor $\mathbf{i}$).