P4 de Álgebra Linear I – 2010.2

Data: 29 de Novembro de 2010.

Gabarito.

Questão 1) Considere o plano

$$\pi\colon x + y + z = 1$$

e as retas r_1 e r_2 cujas equações paramétricas são

$$r_1 = (1 + t, 1 - t, 2\,t), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$r_2 = (2 + t, 1 - t, 1 + 2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Determine as equações cartesianas de **todos** os planos τ de $\mathbb{R}^3$ tais que a distância entre π e τ seja 1.

b) Determine a equação cartesiana do plano ρ que contém as retas r_1 e r_2.

c) Determine a distância entre as retas r_1 e r_2.

Resposta:

(a) Observe que os planos τ procurados devem ser paralelos ao plano π, em caso contrário os planos τ interceptariam o plano π e a distância entre eles seria zero. Portanto, os planos τ são da forma

$$\tau\colon x + y + z = d.$$

Devemos determinar o valor de d.

Escolhemos o ponto $P = (d, 0, 0)$ do plano τ, consideramos a reta s que contém o ponto P e é perpendicular a π,

$$s = (d + t, t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

e determinamos o ponto Q de interseção da reta s e o plano π. A distância entre os planos τ e π é $|\overline{PQ}|$.

O ponto Q deve verificar a equação do plano π, isto é,

$$d + t + t + t = 1, \quad d + 3\,t = 1, \quad t = \frac{1-d}{3}.$$

Logo

$$Q = \left(d + \frac{1-d}{3}, \frac{1-d}{3}, \frac{1-d}{3} \right).$$

Portanto

$$\overline{PQ} = \left(\frac{1-d}{3}, \frac{1-d}{3}, \frac{1-d}{3} \right), \qquad |\overline{PQ}| = \frac{|1-d|}{3}\,\sqrt{3}.$$

Devemos ter

$$\frac{|1-d|}{3}\,\sqrt{3} = 1, \qquad |1-d| = \sqrt{3}, \quad 1-d = \pm\sqrt{3}, \quad d = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Portanto existem dois planos τ_1 e τ_2 cuja distância a π é 1:

$$\tau_1 \colon x + y + z = 1 + \sqrt{3}, \qquad \tau_2 \colon x + y + z = 1 - \sqrt{3}.$$

(b) Consideramos os pontos $A = (1, 1, 0) \in r_1$ e $B = (2, 1, 1) \in r_2$. O vetor $\overline{AB} = (1, 0, 1)$ é paralelo ao plano ρ. O vetor diretor $(1, -1, 2)$ das retas r_1 e r_2 também é paralelo ao plano ρ. Portanto um vetor normal n do plano ρ é

$$n = (1, 0, 1) \times (1, -1, 2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -1, -1).$$

Portanto,

$$\rho \colon x - y - z = d.$$

Para determinar d usamos a condição $A \in \rho$:

$$1 - 1 - 0 = d, \quad d = 0.$$

Portanto,

$$\rho \colon x - y - z = 0.$$

(c) A distância entre as retas paralelas r_1 e r_2 é a altura h do paralelogramo "cujos lados são os vetores" $(1,-1,2)$ (o vetor diretor das retas) e $\overline{AB} = (1,0,1)$ e cuja base é o vetor $(1,0,1)$. Isto é

$$h = \frac{\text{área do paralelogramo}}{\text{comprimento da base}} = \frac{|(1,0,1)\times(1,-1,2)|}{|(1,-1,2)|} =$$
$$= \frac{|(1,-1,-1)|}{|(1,-1,2)|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Questão 2) Considere as transformações lineares

$$A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad B, C\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cujas matrizes na base canônica são, respectivamente,

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad [B] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad [C] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que a matriz $[A]$ nao é diagonalizável, que 0 é um autovalor de A e que o vetor $v = (1,1)$ é um autovetor de A, determine os valores de a, b e c.

b) Sabendo que o vetor $(1,1,1)$ é um autovetor de B, determine **explicitamente** uma matriz diagonal D e matrizes P e P^{-1} tais que

$$[B] = P\,D\,P^{-1}.$$

c) Determine a equação cartesiana da imagem $\mathbb{V}$ da transformação linear C.

d) Considere o sub-espaço vetorial $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbb{W} = \{v = (x,y,z)\colon x + y - z = 0\}.$$

Determine uma base ortogonal η de $\mathbb{W}$ que contenha o vetor $(0,1,1)$. Determine as coordenadas do vetor $(1,2,3)$ de $\mathbb{W}$ na base η.

Resposta:

(a) Observe que Como a matriz $[A]$ não é diagonalizável, a única possibilidade é que o autovalor 0 tenha multiplicidade dois. Caso contrário a matriz teria dois autovalores diferentes e, como conseqüência, teria dois autovetores linearmente independentes e portanto uma base de autovetores. Logo, nesse caso, seria diagonalizável. Como conseqüência o autovalor associado a $(1, 1)$ é zero. Portanto,

$$\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pois 0 é um autovalor associado ao autovetor $(1, 1)$. Portanto,

$$\begin{pmatrix} 2+a \\ b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim $a = -2$ e $b + c = 0$.

Como o traço é a soma dos autovalores com suas multiplicidades, temos

$$\text{traço}(A) = 0 + 0 = 0 = 2 + c.$$

Portanto, $c = -2$. Logo $b = 2$. Obtemos

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Para determinar a matriz D diagonal devemos calcular em primeiro lugar os autovalores de $[B]$.

Observe que sabemos que $(1, 1, 1)$ é um autovetor. Achamos o autovalor associado a este vetor

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo 4 é um autovalor de B.

Para determinar os outros autovalores determinamos o polinômio característico de $[B]$,

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &=(2-\lambda)\big((2-\lambda)^2-1\big)-\big((2-\lambda)-1\big)+\big(1-(2-\lambda)\big)= \\ &=(2-\lambda)\big(\lambda^2-4\,\lambda+3\big)-2+2\,\lambda= \\ &=-\,\lambda^3+6\,\lambda^2-9\lambda+4. \end{aligned}$$

As raízes do polinômio devem divir a 4. De fato, sabemos que 4 é uma raiz. Usando o método de Ruffini temos

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 6 & -9 & 4 \\ +4 & & -4 & 8 & -4 \\ & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

Portanto,

$$-\lambda^3+6\,\lambda^2-9\lambda+4=-(\lambda-4)\,(\lambda^2-2\,\lambda+1).$$

Portanto, as raízes são $\lambda=4$ e

$$\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1.$$

Logo os autovalores são

$$4, \qquad 1 \quad \text{(multiplicidade dois)}.$$

Temos

$$D=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

As colunas de P devem ser uma base de autovetores de $[B]$ (associados a 4, 1 e 1, respectivamente). A seguir calcularemos estes autovetores:

autovetores associados a 4*:*

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos o sistema

$$-2\,x+y+z=0, \quad x-2\,y+z=0, \quad x+y-2\,z=0.$$

Trocando a ordem das equações e escalonando, obtemos

$$x-2\,y+z=0, \quad 3\,y-3\,z=0.$$

Logo $y=z$ e $x=y$. Um autovetor associado a 4 é $(1,1,1)$.
autovetores associados a 1*:*

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos a equação

$$x+y+z=0.$$

Observe que os autovetores associados a 1 são ortogonais aos autovetores associados a 4. Portanto é possível obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de B. Para isso escolhemos primeiro uma base ortogonal β de autovetores de B. Por exemplo

$$\begin{aligned} \beta &= \{(1,1,1),(1,-1,0),(1,1,1)\times(1,-1,0)\} = \\ &= \{(1,1,1),(1,-1,0),(1,1,-2)\}. \end{aligned}$$

Observe que a matriz da transformação linear B na base β e a matriz diagonal D obtida acima.

Para simplificar os cálculos de P^{-1} podemos normalizar β, obtendo uma base ortonormal γ formada por autovetores de B,

$$\gamma = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

Observe que a matriz da transformação linear B na base γ também é D.

Finalmente, temos

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Como P é uma matriz ortogonal (suas colunas são os vetores de uma base ortonormal) sua inversa é a sua trasposta. Portanto,

$$P^{-1} = P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(c) A imagem de $[C]$ está gerada pelos vetores coluna da matriz $[C]$, correspondentes as vetores

$$C(\mathbf{i}) = (1,1,1), \quad C(\mathbf{j}) = (1,2,2), \quad C(\mathbf{k}) = (2,3,3),$$

que são a imagem de uma base de $\mathbb{R}^3$ (a base canônica) por C.

Os vetores $(1,1,1)$ e $(1,2,2)$ geram o plano vetorial de vetor normal

$$(1,1,1) \times (1,2,2) = (0,-1,1).$$

Isto é, o plano vetorial $y - z = 0$. Observe que $(2,3,3)$ pertence a este plano. Portanto,

$$\mathbb{V} = \{v = (x,y,z) \colon y - z = 0\}.$$

(d) Suponha que

$$\eta = \{(0,1,1), v = (a,b,c)\}.$$

O vetor v deve ser ortogonal a $(0,1,1)$ e ao vetor normal do plano $\mathbb{W}$ (o vetor $(1,1,-1)$). Portanto, podemos escolher

$$v = (0,1,1) \times (1,1,-1) = (-2,1,-1).$$

Assim (por exemplo)

$$\eta = \{(0,1,1), (-2,1,-1)\}.$$

Escreva $w = (1,2,3)$ e considere suas coordenadas na base η, $(w)_\eta = (x,y)$. Isto significa que

$$(1,2,3) = x\,(0,1,1) + y\,(-2,1,-1).$$

Temos

$$(1,2,3) \cdot (0,1,1) = x\,(0,1,1) \cdot (0,1,1), \quad 5 = 2\,x, \quad x = 5/2.$$

Também temos

$$(1,2,3)\cdot(-2,1,-1) = y\,(-2,1,-1)\cdot(-2,1,-1), \quad -3 = 6\,y, \quad y = -1/2.$$

Logo

$$(w)_\eta = \big(5/2, -1/2\big).$$

Questão 3)

a) Determine a inversa da matriz Determine a inversa da matriz

prova tipo A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

prova tipo B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

prova tipo C:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova tipo D:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Considere a base

$$\beta = \{w_1 = (1,1,1), w_2 = (2,0,1), w_3 = (3,1,0)\}.$$

e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que verifica

$$\begin{aligned} T(w_1) &= (3,1,2) = w_1 + w_2, \\ T(w_2) &= (5,1,1) = w_2 + w_3, \\ T(w_3) &= (8,2,3) = w_1 + 2\,w_2 + w_3, \end{aligned}$$

Determine a matriz $[T]_\beta$ de T na base β.

Resposta:

(a) Desenvolvimento. Resposta (prova tipo A).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação (linha II) - 2 (linha I) e (linha III) - (linha I):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação $-1/3$ (linha II):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação (linha III)+ (linha II):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação $3/5$ (linha III):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/5 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

operação denominador comúm linhas II e III:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 10/15 & -5/15 & 0 \\ -3/15 & -3/15 & 9/15 \end{pmatrix}.$$

operação (linha II) - 2/3 (linha III):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12/15 & -3/15 & -6/15 \\ -3/15 & -3/15 & 9/15 \end{pmatrix}.$$

operação (linha I) - (linha III):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 18/15 & 3/15 & -9/15 \\ 12/15 & -3/15 & -6/15 \\ -3/15 & -3/15 & 9/15 \end{pmatrix}.$$

operação (linha I) - 2 (linha II):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -6/15 & 9/15 & 3/15 \\ 12/15 & -3/15 & -6/15 \\ -3/15 & -3/15 & 9/15 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

prova tipo A:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

prova tipo B:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

prova tipo C:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova tipo D:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) As colunas da matriz $[T]_\beta$ são as coordenadas dos vetores $T(w_1)$, $T(w_2)$ e $T(w_3)$ na base $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$