G3 de Álgebra Linear I – 2011.1
Gabarito

---

1) Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz na base canônica é

$$[A] = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine todos os autovalores de A.

(b) Determine, se possível, uma forma diagonal de A.

(c) Determine, se possível, uma base δ (escrita na base canônica) tal que a matriz $[A]_\delta$ de A na base δ seja

$$[A]_\delta = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Determine, se possível, uma base γ de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A que **não** seja ortogonal.

(e) Determine se $[A]$ é semelhante a alguma (ou algumas, ou nenhuma, ou todas) das matrizes B, C, E a seguir

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(a) Para calcular os autovalores determinamos o polinômio característico de $[A]$,

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (4-\lambda)\Big((4-\lambda)(4-\lambda)-4\Big) \\ &+2\Big(-8+2\,\lambda-4\Big)-2\Big(4+8-2\,\lambda\Big)= \\ &=(4-\lambda)\Big(16-8\,\lambda+\lambda^2-4\Big)+8\,\lambda-48= \\ &=(4-\lambda)\Big(12-8\,\lambda+\lambda^2\Big)+8\,\lambda-48= \\ &=48-32\,\lambda+4\,\lambda^2-12\,\lambda+8\,\lambda^2-\lambda^3+8\,\lambda-48= \\ &=-\lambda^3+12\,\lambda^2-36\,\lambda=-\lambda\left(\lambda^2-12\,\lambda+36\right)= \\ &=-\lambda\,(\lambda-6)^2.\end{aligned}$$

Portanto temos $\lambda = 0$ e $\lambda = 6$ (duplo).

(b) Estudaremos se A é diagonalizável. Para isso veremos os autovetores associados aos autovalores de A. Os autovetores associados a 6 são obtidos resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} 4-6 & -2 & -2 \\ -2 & 4-6 & -2 \\ -2 & -2 & 4-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é

$$-2\,x-2\,y-2\,z=0, \quad x+y+z=0.$$

Portanto, os autovetores associados a 6 são os vetores não nulos do plano $x+y+z=0$. Temos assim dois autovetores linearmente independentes. Acrescentando um autovetor associado a 0 obteremos uma base formada por autovetores de A. Portanto, A é diagonalizável.

As formas diagonais são

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(c) Seja $\delta = \{v_1, v_2, v_3\}$. Temos que

$$A(v_1) = 6\,v_1, \quad A(v_2) = v_2 + v_3, \quad A(v_3) = \bar{0}.$$

Portanto, v_1 e v_3 são autovetores de A associados a 6 e 0, respectivamente. Escolhemos $v_1 = (1, -1, 0)$ (veja o item anterior) e determinamos um autovetor associado a 0,

$$\begin{pmatrix} 4-0 & -2 & -2 \\ -2 & 4-0 & -2 \\ -2 & -2 & 4-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é

$$4\,x - 2\,y - 2\,z = 0, \quad -2\,x + 4\,y - 2\,z = 0,$$

note que a terceira equação é combinação linear destas duas equações. Considerando a primeira equação menos a segunda temos $6\,x - 6\,y = 0$, $y = x$. Também temos $x = z$. Assim podemos escolher $v_3 = (1, 1, 1)$.

Escrevemos $v_2 = (x, y, z)$ e temos

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando obtemos

$$-2\,x - 2\,y - 2\,z = 1.$$

Uma solução é $v_2 = (-1/2, 0, 0)$. Portanto, uma possível base (existem infinitas) é

$$\delta = \{(1, -1, 0), (-1/2, 0, 0), (1, 1, 1)\}$$

(d) É suficiente considerar o vetor $(1, 1, 1)$ (autovetor associado a 0) e dois vetores não nulos do plano $x+y+z = 0$ não ortogonais entre si. Por exemplo,

$$\gamma = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}.$$

(e) Observe que matrizes semelhantes têm o mesmo traço e que o traço de $[A]$ é 12. Como o traço de E é 11, temos $[A]$ não é semelhante a E.

Observe que matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores e que os autovalores de $[A]$ são $6, 6, 0$. Como os autovalores de C são $6, 5, 1$, temos que $[A]$ não é semelhante a C.

As matrizes $[A]$ e B têm os mesmos autovalores com as mesmas multiplicidades. Como $[A]$ é diagonalizável, se B for semelhante a $[A]$ também deverá ser diagonalizável. Vejamos se B é diagonalizável. Para isso calculamos os autovetores de B associados a 6,

$$\begin{pmatrix} 6-6 & 1 & 0 \\ 0 & 6-6 & 0 \\ 0 & 1 & 0-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos $y = 0$ e $z = 0$. Portanto, somente é possível achar um autovetor associado a 6 e a matriz B não é diagonalizável. Portanto, $[A]$ e B não são semelhantes.

---

2) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear. Sabendo que

$$T(1, -1, 1) = (0, 0, 0)$$

e que $T(v) = 2\,v$ caso v pertença ao plano $x + y + z = 0$.

(a) Seja $[T]_{\mathcal{E}}$ a matriz de T na base canônica. Determine **explicitamente** matrizes P e D, onde D é diagonal, tais que

$$[T]_{\mathcal{E}} = P\,D\,P^{-1}.$$

(b) Calcule o traço de $[T^3]_{\mathcal{E}}$.

(c) Suponha que as matrizes A e B são diagonalizáveis e que possuem a mesma base de autovetores. Decida se $A\,B = B\,A$.

Resposta:

a) Observe que $(1, -1, 1)$ é um autovetor associado a 0 e que os vetores (não nulos) do plano $x + y + z = 0$ são autovetores associados ao autovalor 2. Portanto podemos escolher $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, -1)$. Assim obtemos

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Para calcular o traço de $[T]^3$ observamos que

$$[T]^3 = P\,D^3\,P^{-1} = P\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^3 P^{-1} = P\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} P^{-1}.$$

Observe que $[T]^3$ e D^3 tem o mesmo traço (são semelhantes). Portanto, o traço de $[T]^3 = 16$.

c) Seja P uma matriz cujas colunas formam uma base de autovetores comuns de A e B. Sejam D_A e D_B formas diagonais de A e B. Observe que matrizes diagonas verificam

$$D_A\,D_B = D_B\,D_A = D.$$

Observe que, por definição de P, D_A e D_B, temos que

$$A = P\,D_A\,P^{-1} \quad \text{e} \quad B = P\,D_B\,P^{-1}$$

Temos

$$A\,B = P\,D_A\,P^{-1}\,P\,D_B\,P^{-1} = P\,D_A\,D_B\,P^{-1} = P\,D\,P^{-1}.$$

Também se verifica,

$$B\,A = P\,D_B\,P^{-1}\,P\,D_A\,P^{-1} = P\,D_B\,D_A\,P^{-1} = P\,D\,P^{-1}.$$

Logo $A\,B = B\,A$.

---

3) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear não nula (isto é, existe algum vetor $\bar{v}$ tal que $T(\bar{v}) \neq \bar{0}$). Sabendo que

- a matriz $[T]$ de T na base canônica possui traço e determinante iguais a zero,
- $T^3 = T$ e
- $[T] = Q\,D\,Q^{-1}$, onde D é uma matriz diagonal e Q é uma matriz ortogonal da forma

$$Q = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & x\\ 0 & 1/\sqrt{3} & y\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & z\end{pmatrix}$$

  cujo determinante é igual a 1.

Responda:

a) Determine **todos** os possíveis valores (x, y, z).

b) Determine uma matriz 3×3 diagonal E que não é nula, possui traço e determinante iguais a zero e verifica $E^3 = E$.

c) Determine os autovalores da matriz $[T]$.

d) Determine **explicitamente** uma matriz $[T]^2$ que verifique as condições do enunciado.

e) Calcule a primeira coluna da matriz $[T]^{500}$.

Resposta:

a) Como a matriz é ortogonal temos que (x, y, z) é perpendicular aos vetores $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Portanto é paralelo ao vetor

$$(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \times (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big).$$

Observe que este vetor é unitário por construção. Logo temos duas possibilidades:

$$(x, y, z) = \pm\Big(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big).$$

Se escolhemos o sinal $+$ temos que o determinante da matriz Q é

$$\det(Q) = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\big((1+1) + 2(1+1)\big) = 1.$$

Logo
$$(x, y, z) = \big(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\big).$$
De fato, v. não necessita calcular o determinante. Escreva v_1, v_2 e v_3 os vetores coluna. Pela definição de v_3, $v_1 \times v_2 = v_3$. Também temos que o determinante da matriz anterior é
$$v_1 \cdot (v_2 \times v_3) = -v_3 \cdot (v_2 \times v_1) = v_3 \cdot (v_1 \times v_2) = v_3 \cdot v_3 = |v_3|^2 = 1.$$

b) Como o determinante é o produto dos autovalores (contados com multiplicidade) um autovalor de E é necessariamente zero. Sejam λ_1 e λ_2 os outros autovalores. Como o traço é a soma dos autovalores (contados com multiplicidade) temos
$$0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 = -\lambda_2.$$
Portanto temos
$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix},$$
onde $\lambda > 0$.

Por hipótese temos
$$E^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-\lambda)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$
Portanto, $\lambda^3 = 1$ e assim $\lambda = 1$. Logo
$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$
ou igual a uma matriz com a diagonal permutada.

c) Como D é semelhante a matriz T ela verifica as condições do item (b). Podemos também pode repetir os argumentos. Como o determinante é o produto dos autovalores (contados com multiplicidade) um autovalor é necessariamente zero. Sejam λ_1 e λ_2 os outros autovalores. Como o traço é a soma dos autovalores (contados com multiplicidade) temos
$$0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_1 = -\lambda_2.$$

Observe que esta última igualdade implica que λ_1 e λ_2 são reais. Observe que como T não é a transformação linear nula estes autovalores são não nulos.

Para determinar λ_1 consideramos um autovetor v_1 de λ_1. Como $T^3 = T$ temos que

$$T^3(v_1) = \lambda_1 T^2(v_1) = \lambda_1^2 T(v_1) = \lambda_1^3 v_1 = T(v_1) = \lambda_1 v_1.$$

Portanto, (como $\lambda_1 \neq 0$) temos $\lambda_1^2 = 1$, $\lambda_1 = \pm 1$. Assim os autovalores de T são $0, 1, -1$.

d) A matriz D é uma matriz diagonal semelhante a T. Portanto, possui os mesmos autovalores de T. Portanto, há seis possibilidades para D. Escrevemos abaixo as seis possíveis matrizes D:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, temos três possibilidades para D^2,

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos

$$T^2 = Q\, D\, Q^{-1}\, Q\, D\, Q^{-1} = Q\, D\, D\, Q^{-1} = Q\, D^2\, Q^{-1}.$$

Portanto,

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3+1/6 & -1/3+2/6 & -1/3-1/6 \\ -1/3+2/6 & 1/3+4/6 & 1/3-2/6 \\ -1/3-1/6 & 1/3-2/6 & 1/3+1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Observe que este resultado é compatível com o fato de T^2 ter traço $0+(-1)^2+(1)^2 = 2$ e determinante nulo.

As outras possibilidades para $[T]^2$ são

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2+1/6 & 2/6 & 1/2-1/6 \\ 2/6 & 4/6 & -2/6 \\ 1/2-1/6 & -2/6 & 1/2+1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

e

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 + 1/3 & -1/3 & 1/2 - 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 - 1/3 & 1/3 & 1/2 + 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 5/6 \end{pmatrix}$$

e) É suficiente observar que se verifica

$$T^{500} = Q\,D\,Q^{-1}\,Q\,D\,Q^{-1} \cdots Q\,D\,Q^{-1} = Q\,D^{500} Q^{-1}$$

e que $D^2 = D^{500}$. De fato $D^{2n+1} = D$ e $D^{2n} = D^2$. Portanto, $T^{500} = T^2$.