G3 de Álgebra Linear I – 2008.1

Gabarito

---

1) Verdadeiro ou falso:

• Considere A e B duas matrizes 3×3 tais que existe uma base de $\mathbb{R}^3$ de vetores $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ que são simultaneamente autovetores de A e de B. Então as matrizes A e B são semelhantes.

Resposta: Falso. É suficiente considerar as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qualquer vetor não nulo é um autovetor das duas matrizes e não são semelhantes: dada qualquer matriz P com inversa se verifica $P\,B\,P^{-1} = 0 \neq A$.

• Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ inversível e denote por T^{-1} a sua inversa. Se $\overrightarrow{u}$ é um autovetor de T então $\overrightarrow{u}$ também é um autovetor de T^{-1}.

Resposta: Verdadeiro. Temos $T(\overrightarrow{u}) = \lambda\,\overrightarrow{u}$, $\lambda \neq 0$ (pois a transformação é inversível). Da definição de inversa obtemos

$$\overrightarrow{u} = T^{-1}(T(\overrightarrow{u})) = T^{-1}(\lambda\,\overrightarrow{u}) = \lambda\,T^{-1}(\overrightarrow{u}).$$

Portanto,

$$T^{-1}(\overrightarrow{u}) = \lambda^{-}1\,\overrightarrow{u}$$

e $\overrightarrow{u}$ é um autovetor de T^{-1} (cujo autovalor é λ^{-1}).

• Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ inversível e denote por T^{-1} a sua inversa. Se λ é um autovalor de T então λ também é um autovalor de T^{-1}.

Resposta: Falso. É suficiente considerar $T(\overrightarrow{u}) = 2\,\overrightarrow{u}$ para todo vetor $\overrightarrow{u}$. O único autovalor de T é 2. A inversa de T é $T^{-1}(\overrightarrow{u}) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{u}$. O único autovalor de T^{-1} é $1/2$.

- Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Existe uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que M é a *matriz de mudança de base,* da base canônica à base β.

Resposta: Verdadeiro. A matriz M tem determinante não nulo, portanto possui inversa M^{-1}. Sejam $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ e $\overrightarrow{u}_3$ os vetores coluna da matriz M^{-1}. Estes vetores são linearmente intependentes (o determinante de M^{-1} é não nulo). Portanto, $\beta = \{\overrightarrow{u}_1; \overrightarrow{u}_2; \overrightarrow{u}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. A matriz

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u}_1 & \overrightarrow{u}_2 & \overrightarrow{u}_3 \end{pmatrix}$$

representa a matriz de mudança de base da base β à base canônica. Portanto, matriz M é a matriz de mudança de base da base canônica à base β.

- Seja A uma matriz 3×3 cujo polinômio característico é $(1-\lambda)(2-\lambda)^2$. Então a matriz A é semelhante à matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Falso. É suficiente considerar a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz não é diagonalizável: somente podemos encontrar um autovetor linearmente independente associado a 2, portanto não existe uma base de autovetores de M e M não é semelhante a uma matriz diagonal.

Tabelas de respostas

- prova tipo A:

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		f	
1.b	v		
1.c		f	
1.d	v		
1.e		f	

- prova tipo B:

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	v		
1.b		f	
1.c	v		
1.d		f	
1.e		f	

- prova tipo C:

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		f	
1.b	v		
1.c		f	
1.d		f	
1.e	v		

- prova tipo D:

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	v		
1.b		f	
1.c		f	
1.d	v		
1.e		f	

2) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Calcularemos a inversa da matriz A usando o método de Gauss.

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (II)-2 (I) e (III)-2 (I):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. -(II):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (III) +3 (II):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. -$\frac{1}{2}$ (III):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

6. (II)+(III):
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

7. (I)-2 (II):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

- prova tipo B:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/2 & -2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

- prova tipo C:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & -2 \end{pmatrix}.$$

- prova tipo D:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -2 \end{pmatrix}.$$

---

3) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é
$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de T.

(b) Determine, se possível, uma base de autovetores de T.

(c) Considere a matriz $N = ([T]_{\mathcal{E}})^5$. Determine o traço de N.

(d) Determine se existe uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se a base γ existir determine-a explicitamente. Caso não exista tal base explique claramente os motivos.

(e) Determine se existe uma base η de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base η seja

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a base η existir determine-a explicitamente. Caso não exista tal base explique claramente os motivos.

Resposta:
(a) Calculamos o polinômio característico de T:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & 4 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & -\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(2+\lambda)\,(\lambda^2 - 3\,\lambda + 2) + (-6 + 2\lambda + 2) + 4\,(2-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\,\lambda = -\lambda\,(\lambda^2 - \lambda - 2).$$

Portanto, as raizes de $p(\lambda)$ são 0 e

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}, \quad 2, -1.$$

Observe que este resultado é compatível com o traço da matriz 1 coincidir com a soma dos autovalores $(-2+0+3=1=0+2-1)$

(b) Como os autovetores de $0, -1, 2$ são linearmente independentes, eles formam um base de $\mathbb{R}^3$.

autovetores de 0**.** Devemos resolver os sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$-2\,x - y + 4\,z = 0, \quad -2\,x + 2\,z = 0, \quad -x - y + 3\,z = 0.$$

Temos $x = z$ e $y = 2\,x$. Podemos escolher o vetor

$$\overrightarrow{v}_1 = (1, 2, 1).$$

autovetores de -1**.** Devemos resolver os sistema

$$\begin{pmatrix} -2-(-1) & -1 & 4 \\ -2 & 0-(-1) & 2 \\ -1 & -1 & 3-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$-x - y + 4\,z = 0, \quad -2\,x + y + 2\,z = 0, \quad -x - y + 4\,z = 0.$$

Escalonando

$$x + y - 4\,z = 0, \qquad 3\,y - 6\,z = 0.$$

Logo $y = 2\,z$ e $x = 2\,z$. Podemos escolher o vetor

$$\overrightarrow{v}_2 = (2, 2, 1).$$

autovetores de 2**.** Devemos resolver os sistema

$$\begin{pmatrix} -2-(2) & -1 & 4 \\ -2 & 0-(2) & 2 \\ -1 & -1 & 3-(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$-4\,x - y + 4\,z = 0, \quad -2\,x - 2\,y + 2\,z = 0, \quad -x - y + z = 0.$$

Logo

$$x + y - z = 0, \quad 4\,x + y - 4\,z = 0$$

Escalonando, temos

$$-3\,y = 0.$$

Portanto, $y = 0$ e $x = z$. Podemos escolher o vetor

$$\overrightarrow{v}_3 = (1, 0, 1).$$

Portanto, uma base de autovetores é

$$\beta = \{\overrightarrow{v}_1 = (1, 2, 1); \overrightarrow{v}_2 = (2, 2, 1); \overrightarrow{v}_3 = (1, 0, 1)\}.$$

(c) Observe que $[T]_{\mathcal{E}} = N$ é semelhante a sua forma diagonal,

$$[T]_{\mathcal{E}} = N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Portanto,

$$N^5 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Logo N^5 é semelhante e

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2^5 = 32) & 0 \\ 0 & 0 & ((-1)^5 = -1) \end{pmatrix}.$$

Portanto, N^5 e B têm o mesmo traço: 31.

(d) É suficiente considerar a base de autovetores

$$\gamma = \{\overrightarrow{v}_3 = (1, 0, 1); \overrightarrow{v}_1 = (1, 2, 1); \overrightarrow{v}_2 = (2, 2, 1)\}.$$

(e) Observe que se existisse uma base η tal que

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

então 1 seria um autovalor de T (o segundo vetor da base η seria um autovetor de T associado a 1), o que é falso. Portanto, não existe a base η.

---

4) Considere a base α de $\mathbb{R}^3$

$$\alpha = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \right\}.$$

a) Mostre que α é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

b) Considere o vetor $\overrightarrow{v}$ cujas coordenadas na base canônica são $(2, 4, 1)$. Determine a segunda coordenada do vetor $\overrightarrow{v}$ na base α.

c) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base α.

Resposta:
(a) Em primeiro lugar todos os vetores são unitários:

$$\sqrt{(\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{1/3 + 1/3 + 1/3} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\tfrac{-2}{\sqrt{6}})^2} = \sqrt{1/6 + 1/6 + 4/6} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\tfrac{-1}{\sqrt{2}})^2} = \sqrt{1/2 + 1/2} = \sqrt{1} = 1.$$

Em segundo lugar, os vetores são ortogonais entre si:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{18}} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{-1}{\sqrt{6}} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{-1}{\sqrt{12}} = 0.$$

Portanto, os vetores formam uma base ortonormal.

(b) Escrevemos

$$(2,4,1) = x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + y\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) + z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Queremos determinar y.

Observamos que, como os vetores $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ são unitários e ortogonais entre si,

$$(2,4,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = y.$$

Logo

$$y = \frac{2+4-2}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}.$$

(c) A matriz de mudança de base da base α para à base canônica é

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz P de mudança de base da base canônica para à base α é a inversa de Q, $P = Q^{-1}$. A matriz Q é ortogonal (seus vetores coluna formam uma base ortonormal). Portanto sua inversa é a transporta. Portanto,

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{-2}{\sqrt{6}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

---

5) Considere a matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabendo que 3 e 2 são autovalores da matriz A, que o vetor $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ é um autovetor de A e que seu traço é 6. Determine **a**, **b** e **c**.

Resposta: Observe que

- Como $\mathbf{i}$ é um autovalor, $A(1, 0, 0) = (k, 0, 0) = (3, 0, c)$. Logo $c = 0$.
- Como o traço da matriz é $6 = 3 + a + 1$, $a = 2$.
- Como o traço é a soma dos autovalores de matriz, os autovalores de A são $3, 2, 1$.
- O determinante é o produto dos autovalores, portanto é $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Desenvolvendo o determinante, temos $6 = 3\,(2 - 2\,b)$. Logo $b = 0$.

$$\boxed{\mathbf{a} = 2 \qquad \mathbf{b} = 0 \qquad \mathbf{c} = 0}$$

- prova tipo B: $\boxed{\mathbf{a} = 0 \qquad \mathbf{b} = 2 \qquad \mathbf{c} = 0}$
- prova tipo C: $\boxed{\mathbf{a} = 3 \qquad \mathbf{b} = 0 \qquad \mathbf{c} = 0}$
- prova tipo D: $\boxed{\mathbf{a} = 0 \qquad \mathbf{b} = 0 \qquad \mathbf{c} = 3}$