G3 de Álgebra Linear I – 2007.2
Gabarito

---

1) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica

$$\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Determine os autovalores de T e seus autovetores correspondentes.

Considere as bases β e η de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \beta &= \{(0,1,1),(1,1,0),(1,0,1)\}, \\ \eta &= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}. \end{aligned}$$

b) Determine explicitamente a matriz P de mudança de base da base canônica à base β.

c) Determine a segunda coluna da matriz $[T]_\eta$ de T na base η.

d) Encontre, se possível uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz $[T]_\gamma$ de T na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(a) O polinômio característico de T é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 3-\lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\,(3-\lambda)^2.$$

Portanto, os autovalores de T são 1 (simples) e 3 (multiplicidade dois).

Para determinar os autovetores de 1 devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 1 \\ 0 & 3-1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema linear

$$z = 0, \quad 2\,y + z = 0, \quad 2\,z = 0.$$

Portanto, os autovetores associados a 1 são os vetores da forma $(t, 0, 0)$, onde $t \neq 0$. Por exemplo, $(1, 0, 0)$ é um autovetor associado a 1.

Para determinar os autovetores de 3 devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 1 \\ 0 & 3-3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema linear

$$-2\,x + z = 0, \quad z = 0.$$

Portanto, os autovetores associados a 3 são os vetores não nulos (x, y, z) que verificam $x = 0 = z$. Portanto, são da forma $(0, t, 0)$, onde $t \neq 0$. Por exemplo, $(0, 1, 0)$ é um autovetor associado a 3.

(b) A matriz de mudança de base da base β para a base canônica é a matriz Q cujas colunas são os vetores da base β:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz P de mudança de base da base canônica para a base β é a inversa de Q. Calcularemos esta matriz usando o método de Gauss.

1.
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. troca das linhas (I) e (III):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. linha (II) $-$ linha (I):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. linha (III) $-$ linha (II):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. troca das linhas (II) e (III):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. $1/2\times$ linha (II):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. linha (III) $-$ linha (II):
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

8. $-$ linha (III):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

9. linha (I) $-$ linha (III):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz P de mudança de base da pase canônica para a base β é:

$$P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) A segunda coluna da matriz $[T]_\eta$ são as coordenadas de $T(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$ na base η. Observe que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, -6).$$

Devemos escrever

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,-6) = a\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + b\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) + c\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Nesse caso a segunda coluna será (a, b, c). Como a base η é ortonormal, temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,-6) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-6}{\sqrt{18}}, \\ b &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,-6) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{12}{\sqrt{36}} = 2, \\ c &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,-6) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{-2}{\sqrt{12}}. \end{aligned}$$

Portanto, a segunda coluna é

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-6}{\sqrt{18}} \\ \\ 2 \\ \\ \dfrac{-2}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{\sqrt{2}} \\ \\ 2 \\ \\ \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Outra possível resposta é a seguinte. Observe que a matriz de mudança de base da base η para a base canônica é

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

Como esta matriz é ortogonal, a matriz de mudança de base da base canônica para a base η é a inversa de M, que é sua transposta.

$$M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{-2}{\sqrt{6}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente temos

$$[T]_\eta = M^t \, [T]_{\mathcal{E}} \, M.$$

Portanto,

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora é suficiente calcular a segunda coluna deste produto.

(d) Os vetores da base $\gamma = \{e_1, e_2, e_3\}$ devem verificar

$$T(e_1) = e_1, \quad T(e_2) = 3\, e_2, \quad T(e_3) = e_2 + 3\, e_3.$$

Portanto, e_1 é um autovetor associado a 1 e e_2 é um autovetor associado a 3. Podemos escolher,

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0).$$

Onde os vetores estão escritos na base canônica. Também temos

$$T(e_3) = 3\, e_3 + e_2.$$

Portanto, se as coordenadas de e_3 na base canônica são $(e_3)_{\mathcal{E}} = (x, y, z)$ se deve verificar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema linear

$$x + z = 3\, x \qquad 3\, y + z = 1 + 3\, y \qquad 3\, z = 3\, z$$

Portanto, $z = 1$, $x = 1/2$ e y pode ser qualquer valor. Assim as bases procuradas são da forma:

$$\gamma = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (1/2, t, 1)\}.$$

---

2) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determine explicitamente **todas** as formas diagonais de M.

b) Determine uma base ortonormal de M formada por autovetores de M.

c) Determine **explicitamente** uma matriz Q tal que

$$M = Q^t\, D\, Q$$

onde D é uma matriz diagonal.

Resposta:

(a) A matriz M é simétrica. Portanto, ela é diagonalizvel. Para determinar as formas diagonais de M devemos calcular seus autovalores. Para isso, necessitamos determinar seu polinômio característico:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\,((2-\lambda)^2 - 1) + (-2 + \lambda - 1) - (1 + 2 - \lambda) =$$

$$= (2-\lambda)\,(3 - 4\,\lambda + \lambda^2) + 2\,\lambda - 6 =$$

$$= (-\lambda^3 + 6\,\lambda^2 - 11\,\lambda + 6) + 2\,\lambda - 6 =$$

$$= -\lambda^3 + 6\,\lambda^2 - 9\,\lambda = -\lambda\,(\lambda^2 - 6\,\lambda^2 - 9) = -\lambda\,(\lambda-3)^2.$$

Portanto os autovalores são 0 (simples) e 3 (multiplicidade dois). Logo existem três formas diagonais:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b)

Para determinar os autovetores de 3 devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -1 & 1 \\ -1 & 2-3 & -1 \\ -1 & -1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o plano $x + y + z = 0$. Observe que como os autovetores de 0 são perpendiculares a esta plano (lembre que autovetores associados a autovetores diferentes de uma matriz simétrica são ortogonias) temos que $(1, 1, 1)$ é um autovetor associado a 0. Para escolher uma base ortogonal de autovetores de M escolhemos um vetor de $x+y+z = 0$, por exemplo $(1, -1, 0)$. O vetor

$$(1, 1, 1) \times (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, 1, -2)$$

é um autovetore associado a 3. Portanto,

$$\eta = \{(1, 1, 1); (1, -1, 0); (1, 1, -2)\}$$

é uma base ortogonal de autovetores de M. Agora é suficiente normalizar (dividir os vetores pelo módulo):

$$\gamma = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1); \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0); \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 1, -2) \right\}$$

(c) Observe que a matriz Q^t deve ser a matriz ortogonal formada pelos vetores de uma base ortonormal de autovetores de M (o i-ésimo vetor coluna associado ao i-ésimo coeficiente da diagonal). Podemos escolher a base calculada no item precedente e obtemos

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

3) Prova D.

(a) Considere o vetor $u = (9, -6, -5)$ e a transformação linear T cuja matriz $[T]$ na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$$

Determine o módulo do vetor $T(u)$.

(b) Determine a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{16}{\sqrt{42}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{-20}{\sqrt{42}} \\ \frac{8}{\sqrt{14}} & \frac{12}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$$

(c) O produto de matrizes abaixo representa (na base canônica) uma projeção P. Determine a equação cartesiana do plano π de projeção e a direção w de projeção.

$$P = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}, \qquad \text{onde} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(a) A matriz é ortogonal: veja que os vetores linha são unitários e ortogonais entre si. Portanto $T(v)$ tem o mesmo módulo que v. Como $v = (9, -6, -5)$ temos

$$|v| = \sqrt{81 + 36 + 25} = \sqrt{142}$$

Portanto

$$|T(v)| = |T(9, -6, -5)| = \sqrt{142}$$

Respostas das outras provas:

- Prova (a):
$$|T(v)| = |T(3, -8, -7)| = \sqrt{122},$$
- Prova (b):
$$|T(v)| = |T(4, -6, -7)| = \sqrt{101},$$
- Prova (c):
$$|T(v)| = |T(8, -6, -5)| = \sqrt{125}.$$

(b) Observe que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{-4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \frac{16}{\sqrt{42}} & \frac{-4}{\sqrt{42}} & \frac{-20}{\sqrt{42}} \\ \frac{8}{\sqrt{14}} & \frac{12}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix},$$

onde a última matriz, que denotaremos por B, é ortogonal (as linhas formam uma base ortonormal). Portanto,

$$A^{-1} = \frac{1}{4} B^t.$$

Logo

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}.$$

Respostas das outras provas:

- Prova (a):

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}.$$

- Prova (b):

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{42}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} \end{pmatrix}.$$

- Prova (c):

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-1}{\sqrt{42}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-5}{\sqrt{42}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(c) Observe que os vetores $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$ estão associados ao autovalor 1 e determinam o plano de projeçõ. Logo o vetor normal do plano é

$$(1,1,0) \times (1,0,1) = (1,-1,-1).$$

Portanto, o plano de projeção é

$$\pi \colon x - y - z = 0.$$

Um autovalor associado a 0 é $(1,-1,1)$, que determina a direção de projeção. Logo

$$w = (1,-1,1).$$

Respostas das outras provas:

- Prova (a):
$$\pi \colon x - y - 2\,z = 0, \qquad w = (1,0,-1).$$
- Prova (b):
$$\pi \colon x + 2\,y + z = 0, \qquad w = (1,1,0).$$
- Prova (c):
$$\pi \colon x - y + z = 0, \qquad w = (1,-1,1).$$