G3 de Álgebra Linear I – 2007.1

Gabarito

---

1) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1.a) Determine os autovalores da matriz $[T]$.

(1.b) Determine os autovetores associados aos autovalores de T.

(1.c) Encontre, se possível, uma base β de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base β, $[T]_\beta$, seja

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(a) O polinômio característico da matriz é

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -2 \\ -2 & 3-\lambda & -3 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 3-\lambda \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+2)\,(3 - 4\lambda + \lambda^2 - 3) - 2\,(-2 + 2\,\lambda + 6 + 2 - 6 + 2\,\lambda)$$

$$-(\lambda+2)\,(\lambda\,(\lambda-4) - 8\,\lambda = \lambda\,(\lambda\,(\lambda-2)) = \lambda^2\,(\lambda-2).$$

Portanto, os autovalores são $\lambda = 0$ (multiplicidade dois) e $\lambda = 2$ (simples).

(b) Para determinar os autovetores associados a 0 devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$-2\,x + 2\,y - 2\,z = 0, \quad -2\,x + 3\,y - 3\,z = 0, \quad 2\,x - y + z = 0.$$

Escalonando,

$$x - y + z = 0, \quad y - z = 0.$$

Portanto, $y = z$ e $x = 0$. Logo os autovetores associados a 0 são da forma

$$(0, t, t), \quad t \neq 0.$$

Verifique.

Para determinar os autovetores associados a 0 devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} -2-2 & 2 & -2 \\ -2 & 3-2 & -3 \\ 2 & -1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$-4\,x + 2\,y - 2\,z = 0, \quad -2\,x + y - 3\,z = 0, \quad 2\,x - y - z = 0.$$

Ou seja,

$$2\,x - y + z = 0, \quad -2\,x + y - 3\,z = 0, \quad 2\,x - y - z = 0.$$

Escalonando,

$$2\,x - y + z = 0, \quad -2\,x + y - 3\,z = 0, \quad z = 0.$$

Logo, $z = 0, \quad y = 2\,x$. Logo os autovetores associados a 0 são da forma

$$(t, 2\,t, 0), \quad t \neq 0.$$

Verifique.

(c) A base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ deve verificar

$$T(v_1) = 2\,v_2, \quad T(v_2) = v_3, \quad T(v_3) = 0.$$

Portanto, v_1 e v_3 devem ser autovetores associados a 2 e 0. Escolhemos os vetores $v_1 = (1, 2, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$. O vetor $v_2 = (x, y, z)$ deve verificar:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema de equações:

$$2\,x - 2\,y + 2\,z = 0, \quad -2\,x + 3\,y - 3\,z = 1, \quad 2\,x - y + z = 1.$$

Escalonando,

$$\begin{gathered} x - y + z = 0, \quad y - z = 1, \quad 2\,y - 2\,z = 2 \\ x - y + z = 0, \quad y - z = 1. \end{gathered}$$

Logo $y = 1 + z$ e $x = 1$. Portanto, $v_2 = (1, 1 + z, z)$. Fazendo $z = 0$, obtemos a base β

$$\beta = \{(v_1 = (1, 2, 0); v_2 = (1, 1, 0); v_3 = (0, 1, 1)\}.$$

---

2) Considere a matriz

$$E = \begin{pmatrix} a & d & e \\ b & 1/3 & f \\ c & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(2.a) Ache a, b, c, d, e e f para que E represente na base canônica um espelhamento (ortogonal) em relação a um plano.

(2.b) Determine a equação cartesiana do plano de espelhamento do item (2.a).

Resposta:

(a) O traço da matriz E é a soma dos autovalores contados com multilplicidade, $1+1-1=1$, logo

$$a + 1/3 + 1/3 = 1, \quad a = 1.$$

A matriz E é simétrica, portanto, $f = 2/2$.

A matriz E é ortogonal, portanto as colunas são vetores unitários e ortogonais, isto implica que $e = \pm 2/3$ e $d = \pm 2/3$. Devemos decidir os sinais. Se $e = 2/3$ então

$$(d, 1/3, 2/3) \cdot (2/3, 2/3, 1/3) = 0, \quad d = -2/3.$$

Analogamente, se $e = -2/3$ então $d = 2/3$.Como a matriz E é simétrica, determinados os valores de e e d estão determinados os valores de $b = d$ e $c = e$. Assim temos duas possibilidades:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(b) O plano de espelhamento é gerado pelos autovetores associados a 1. Portanto, no primeiro caso

$$\begin{pmatrix} 1/3-1 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3-1 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e obtemos

$$2/3(x + y - z) = 0.$$

Logo o plano de espelhamento é $x + y - z = 0$.

No segundo caso

$$\begin{pmatrix} 1/3-1 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3-1 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e obtemos

$$2/3(x - y + z) = 0.$$

Logo o plano de espelhamento é $x - y + z = 0$.

---

3) Considere os vetores

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (0, 1, 1),$$

a base

$$\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$$

e a transformação linear

$$T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(v) = (v \cdot v_3)\, v_1 - (v \cdot v_3)\, v_2.$$

(3.a) Determine a matriz $[T]_\gamma$ da transformação linear T na base γ.

(3.b) Considere a matriz $[T]_\mathcal{E}$ da transformação linear T na base canônica. Determine explicitamente uma matriz N que verifique

$$[T]_\mathcal{E} = N\, [T]_\gamma\, N^{-1}.$$

(3.c) Estude se a transformação linear T é diagonalizável, em caso afirmativo determine sua forma diagonal.

Resposta:

(a) Temos que

$$T(v_1) = (1, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)\, v_1 - (1, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)\, v_2 = 2\, v_1 - 2\, v_2 + 0\, v_3,$$

$$T(v_2) = (1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1)\, v_1 - (1, 0, 1) \cdot (0, 1, 1)\, v_2 = 1\, v_1 - 1\, v_2 + 0\, v_3,$$

$$T(v_3) = (0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)\, v_1 - (0, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)\, v_2 = 2\, v_1 - 2\, v_2 + 0\, v_3,$$

Portanto, a matriz de T na base γ é

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) A matriz N é a matriz de mudança de base da base γ para a base canônica, portanto

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Determinaremos os autovalores de T (observe que para isto podemos usar a matriz de T em qualquer base) por exemplo a base γ. Obtemos

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(\lambda^2-\lambda) = \lambda^2(1-\lambda).$$

Portanto, os autovalores são 1 (simples) e 0 (multiplicidade dois).

Observe, que usando as coordenadas da base γ, temos que os autovetores $v = (x, y, z)_\gamma$ associados a 0 verificam

$$2\,x + y + 2\,z = 0.$$

Portanto podemos escolher dois autovetores linearmente independentes, $w_1 = v_1 - v_2$ e $w_2 = v_1 - v_3$.

Usando as coordenadas na base γ, obtemos que os autovetores $v = (x, y, z)_\gamma$ associados a 1 verificam

$$x + y = 0, \quad z = 0.$$

Portanto $w_3 = v_1 - v_2$ é um autovetor associado a 1. Obtemos assim uma base $\eta = \{w_1, w_2, w_3\}$ de autovetores de T. A matriz de T na base η é

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obviamente, v. poderia ter obtido a matriz de T na base canônica

$$T(\mathbf{i}) = (1,0,0)\cdot(0,1,1)\,v_1 - (1,0,0)\cdot(0,1,1)\,v_2 = (0,0,0)$$

$$T(\mathbf{j}) = (0,1,0)\cdot(0,1,1)\,v_1 - (0,1,1)\cdot(0,1,1)\,v_2 = v_1 - v_2 = (0,1,0)$$

$$T(\mathbf{k}) = (0,0,1)\cdot(0,1,1)\,v_1 - (0,0,1)\cdot(0,1,1)\,v_2 = v_1 - v_2 = (0,1,0).$$

Portanto, a matriz de T na base canônica é

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora v. pode obter a forma diagonal desta matriz.

---

4) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que o determinante de M é zero e que 12 é um autovalor de M, determine:

(4.a) uma forma diagonal D de M,

(4.b) uma matriz Q tal que

$$M = Q\,D\,Q^t.$$

Resposta:

(a) Como o determinante é zero, $\lambda = 0$ é um autovalor. Assim já sabemos dois autovalores de M. Para determinar o terceiro autovalor σ usamos a fórmula do traço

$$0 + 12 + \sigma = 7 + 4 + 7 = 18, \quad \sigma = 6.$$

Portanto, uma forma diagonal de M é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

(b) Como M é simétrica é ortogonalmente diagonalizável. Assim Q é uma matriz (ortogonal) cujas colunas são autovetores unitários associados a 0, 6 e 12. Determinaremos estes autovetores:

• autovetores associados a 0:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$7\,x - 2\,y - 5\,y = 0, \quad -2\,x + 4\,y - 2\,z = 0, \quad -5\,x - 2\,y + 7\,z = 0$$

Observe que a última equação e menos a primeira menos a segunda. Assim temos

$$x - 2\,y + z = 0, \quad 7\,x - 2\,y - 5\,z = 0.$$

Escalonando,

$$x - 2\,y + z = 0, \quad 12\,y - 12\,z = 0, \qquad y = z, \quad x = y.$$

Logo temos

$$(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

Verifique que $(1, 1, 1)$ é autovetor (associado a 0).

• autovetores associados a 6:

$$\begin{pmatrix} 7-6 & -2 & -5 \\ -2 & 4-6 & -2 \\ -5 & -2 & 7-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$x - 2\,y - 5\,z = 0, \quad -2\,x - 2\,y - 2\,z = 0, \quad -5\,x - 2\,y + z = 0$$

Observe que a última equação é obtida como menos a primeira mais dua vezes a segunda. Escalonando,

$$x - 2\,y - 5\,z = 0, \quad -6\,y - 12\,z = 0, \qquad y = -2\,z, \quad x = z.$$

Portanto temos um autovetor $(1, -2, 1)$, normalizando obtemos

$$(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}).$$

Verifique.

• autovetores associados a 12: como a matriz é simétrica estes autovetores são ortogonais aos autovetores associados a 0 e 6. Portanto,

$$(1,1,1)\times(1,-2,1)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=(3,0,-3)$$

é um autovetor associado a 12. Verifique. Normalizando temos $(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2})$.

Portanto, a matriz Q é

$$Q=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$