G3 de Álgebra Linear I – 2006.2

Data: 21 de novembro de 2006

$\boxed{\textbf{Gabarito}}$

---

1) Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[A]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1.a) Determine os autovalores de A e suas multiplicidades.

(1.b) Para cada autovalor λ de A determine o número máximo de autovetores linearmente independentes que existem e mostre um conjunto de tais autovetores.

(1.c) Decida se A é diagonalizável. Em caso afirmativo determine uma forma diagonal D de A.

(1.d) Encontre, se possível, uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que a matriz de A na base β seja

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(a) O polinômio característico de A é:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\,(1-\lambda)\,(2-\lambda) - (-1\,(2-\lambda)+1) =$$

$$= (-\lambda)\,(\lambda^2 - 3\,\lambda + 2) + 1 - \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\,\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3.$$

Portanto, 1 é o único autovalor que tem multiplicidade 3. Observe que este fato é compatível com o traço da matriz ser igual a $3 = 0 + 1 + 2$.

(b) Para determinar os autovetores de 1 devemos resolver o sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 0-1 & 1 & 0 \\ -1 & 1-1 & 1 \\ -1 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, o sistema

$$-x + y = 0 \quad -x + z = 0, \quad -x + z = 0.$$

Portanto, temos que $x = y$ e $x = z$. Assim as soluções são da forma (t, t, t), $t \in \mathbb{R}$. Portanto, somente é possível encontrar um autovetor linearmente independente. Por exemplo, $(1, 1, 1)$.

(c) A matriz não é diagonalizável: não existe uma base de autovetores.

(d) Procuramos uma base $\beta = \{u, v, w\}$ tal que

$$A(u) = u + v, \quad A(v) = v + w, \quad A(w) = w.$$

Portanto, w é um autovetor de A associado a 1. Podemos escolher $w = (1, 1, 1)$.

Da segunda condição obtemos

$$A(v) = v + w = v + (1, 1, 1).$$

Em coordenadas temos $v = (x, y, z)$ (na base canônica):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$y = x + 1, \quad -x + y + z = y + 1, \quad -x + 2z = z + 1.$$

Ou seja,

$$-x + y = 1, \quad -x + z = 1, \quad -x + z = 1.$$

Isto é,
$$-x+y=1, \quad -x+z=1.$$
Podemos escolher o vetor $v=(0,1,1)$ (este sistema possui infinitas soluções, podemos escolher qualquer uma delas).

Finalmente, da primeira condição $A(u)=u+v$ obtemos
$$A(u)=u+v=u+(0,1,1).$$
Em coordenadas temos $u=(x,y,z)$ (na base canônica):
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Obtemos o sistema
$$y=x+0, \quad -x+y+z=y+1, \quad -x+2z=z+1.$$
Ou seja,
$$-x+y=0, \quad -x+z=1, \quad -x+z=1.$$
Podemos escolher o vetor $u=(0,0,1)$.

Portanto,
$$\beta=\{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}.$$
Verifique
$$\begin{aligned} A(0,0,1) &= (0,1,2)=(0,0,1)+(0,1,1), \\ A(0,1,1) &= (1,2,2)=(0,1,1)+(1,1,1), \\ A(1,1,1) &= (1,1,1). \end{aligned}$$

---

2) Seja $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz $[A]$ na base canônica é ortogonal, onde
$$[A]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Considere a base ortonormal γ de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}); (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})\}$$

Suponha que

$$\begin{aligned} A(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) &= (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), \\ A(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) &= (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}). \end{aligned}$$

2.a) Sabendo que o determinante de $[A]$ é -1, determine a matriz $[A]_\gamma$ de A na base γ.

2.b) Determine o elemento $a_{2,2}$ da matriz $[A]$.

2.c) Determine a terceira coordenada do vetor $(1, 1, 0)$ na base γ.

Resposta: Para simplificar escrevemos

$$u = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}),\ v = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}),\ w = (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}).$$

Assim temos que

$$A(u) = v, \quad A(v) = w$$

e

$$u \times v = w.$$

(a) Escrevemos

$$A(w) = a\,u + b\,v + c\,w$$

e obtemos que a matriz na base γ é da forma

$$[A]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Considere a matriz ortogonal

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é a matriz de mudança da base γ à base canônica. Portanto, como $Q^t = Q^{-1}$ (a matriz é ortogonal), obtemos

$$[A] = Q\,[A]_\gamma\,Q^t$$

ou

$$[A]_\gamma = Q^t\,[A]\,Q.$$

Logo $[A]_\gamma$ é o produto de três matrizes ortogonais, portanto $[A]_\gamma$ também é ortogonal.

Como a matriz $[A]_\gamma$ é ortogonal, temos que (a, b, c) é um vetor unitário ortogonal a $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Logo $b = c = 0$. Como o vetor é unitário $a = \pm 1$. Assim

$$[A]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Obseve que $[A]_\gamma$ é semelhante a $[A]$ e lembre que matrizes semelhantes têm o mesmo determinante. Logo a matriz tem determinante -1. Com a escolha $a = 1$ obtemos determinante 1. Logo a resposta é

$$[A]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V. poderia ter raciocinado também da seguinte forma. Como A é ortogonal deve preservar módulos e ângulos (o produto escalar). Como w é ortogonal a u e v devemos ter que $A(w)$ deve ser ortogonal a $A(u) = v$ e $A(v) = w$. Ou seja, $A(w)$ deve ser paralelo a $v \times w = u$, Portanto, como $A(w)$ é unitário, $A(w) = \pm u$. Agora escolhemos o sinal $(-)$ raciocinando como acima.

(b) Do item anterior temos

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Temos agora que o coeficiente a_{22} é o produto

$$(1/\sqrt{3}, 0, -2/\sqrt{6}) \cdot (2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{3}, 0) = 2/\sqrt{18}.$$

(c) Escrevemos

$$(1,1,0) = a\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + b\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + c\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

e queremos determinar c. Como a base é ortogonal, temos

$$(1,1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = c = -1/\sqrt{6},$$

pois

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

e

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 1.$$

---

3) Considere a matriz M dada por

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que 2 é um autovalor e que $(1,1,1)$ é um autovetor de M:

(3.a) Determine os autovalores de M.

(3.b) Determine uma base β ortogonal de autovetores de M.

(3.c) Escreva M da forma $M = P\,D\,P^t$, onde D é uma matriz diagonal.

(3.d) Determine o determinante de M e o valor absoluto do determinante de P.

Resposta:

(a) Como $(1,1,1)$ é um autovetor temos

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Logo 8 é o autovalor associado a $(1,1,1)$.

Já conhecemos dois autovalores, 8 e 2. Seja σ o terceiro autovalor. Temos

$$8 + 2 + \sigma = \text{traço}(M) = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Logo $\sigma = 2$.

(b) Devemos determinar os autovetores associados a 2. Como a matriz é simétrica estes autovetores devem ser ortogonais a $(1,1,1)$. Por exemplo, $(1,0,-1)$. O segundo autovetor, ortogonal a $(1,1,1)$ e $(1,0,-1)$, é $(1,1,1) \times (1,0,-1) = (-1,2,-1)$ Agora é suficiente normalizar os autovetores:

$$\beta = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}); (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}); (-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})\}.$$

(c) Escolhemos a forma diagonal $D = [M]_\beta$ (a matriz na base β)

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Neste caso,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(d) O determinante de M é o produto dos autovalores contados com suas multiplicidades,

$$\det(M) = 8\,2\,2 = 32.$$

Observe que P é uma matriz ortogonal. Portanto, seu determinante é ± 1. Lembre que
$$P\,P^{-1} = P\,P^t = Id,$$
logo
$$\det(P\,P^t) = \det(P)\,\det(P^t) = \det(P)^2 = 1, \quad \det(P) = \pm 1.$$
Logo o valor absoluto do determinante de P é 1.