G3 de Álgebra Linear I – 2006.1

Gabarito

---

1) Considere a matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz M tem determinante 0 e $(1, 0, -1)$ é um autovetor de M.

(a) Determine os autovalores de M.

(b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de M.

(c) Determine uma forma diagonal D de M.

(d) Determine explicitamente matrizes P e P^{-1} tais que

$$M = P\, D\, P^{-1}.$$

(e) Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz na base canônica é M.

Considere a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projeção ortogonal no plano

$$\pi\colon x + 2\,y + z = 0$$

Determine explicitamente a matriz da composição $L \circ T$ na base canônica.

Resposta:

a) Como o determinante da matriz M é 0, o produto dos seus autovalores é 0, portanto M tem um autovalor 0.

Sabemos que $(1,0,-1)$ é um autovetor, calcularemos seu autovalor associado:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-5 \\ 4-4 \\ 5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o autovalor de $(1,0,-1)$ é -6.

Finalmente, seja λ o autovalor de M que ainda não calculamos. Como

$$\text{traço}(M) = -1+8-1 = 6 = 0-6+\lambda,$$

temos $\lambda = 12$. Logo os autovalores de M são

$$0, \quad -6, \quad 12.$$

b) Determinaremos os autovetores associados a 0. Devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos,

$$-x+4\,y+5\,z=0, \quad 4\,x+8\,y+4\,z=0, \quad 5\,x+4\,y-z=0.$$

Observe que a última equação é igual a segunda equação menos a primeira, portanto, pode ser eliminada. Considerando a segunda equação mais quatro vezes a segunda obtemos,

$$24\,y+24\,z=0, \qquad y=-z.$$

Portanto, da primeira equação, obtemos

$$x = z.$$

Logo um autovetor associado a 0 é $(1,-1,1)$.

Finalmente, como a matriz é simétrica, o autovetor associado a 12 é ortogonal aos autovetores associados a 6 e 0. Assim um autovetor associado a 12 é

$$(1,0,-1)\times(1,-1,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,-1).$$

Logo podemos escolher $(1,2,1)$.

Assim, uma base de autovetores de M é

$$\eta = \{(1,2,1),(1,0,-1),(1,-1,1)\}.$$

c) As formas diagonais de M são

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

d) Escolhemos a forma diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que D é a matriz M na base η, ou na base η normalizada (nesse caso, teremos uma base ortonormal). Então podemos escolher P como uma matriz ortogonal cujos colunas são autovetores associados a 12, -6 e 0, respectivamente. Então, como P é ortogonal, temos $P^{-1} = P^t$. Normalizando a base do item (b),

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

e) Considere a base ortonormal

$$\gamma = \left\{ u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right); u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right); u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\},$$

obtida normalizando a base η do item (b).

Temos

$$L(u_1) = 0, \quad L(u_2) = u_2, \quad L(u_3) = u_3.$$

Portanto, a matriz de L na base γ é

$$[L]_\gamma = E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo as matrizes de L e T na base canônica são

$$[L] = P\,E\,P^t \quad \text{e} \quad [T] = P\,D\,P^t.$$

Portanto, como $P\,P^t = Id$,

$$[L \circ T] = [L]\,[T] = P\,E\,P^t\,P\,D\,P^t = P\,E\,D\,P^t.$$

Observe que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$[L \circ T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$[L \circ T] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{-6}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{6}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

---

2) Considere a transformação linear $N\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[N]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de N.

(b) Para cada autovalor λ de N, determine um conjunto de autovetores linearmente independentes de N associados a λ formado por um número máximo de elementos.

(c) Determine uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de N na base γ seja

$$[N]_\gamma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Considere a matriz

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ d & 3 & 0 \\ c & c & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine c e d para que os vetores não nulos do plano

$$\pi \colon x + y = 0$$

sejam autovetores da matriz F e o vetor $(17, 21, 356)$ não seja um autovetor.

Resposta:

a) O polinômio característico da matriz $[N]$ é

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)\,((3-\lambda)^2 - 1) =$$

$$= (4-\lambda)\,(\lambda^2 - 6\lambda + 8).$$

Observe que as raízes de $(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$ são

$$\frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}.$$

Logo os autovalores de N são

$$\lambda = 4 \text{ (multiplicidade dois)}, \quad \lambda = 2.$$

Veja que isto é compatível com o traço da matriz (10 igual à soma dos autovalores com multiplicidade) e o determinante (32 igual ao produto dos autovalores com multiplicidade).

b) Os autovetores associados a 4 são a solução do sistema

$$\begin{pmatrix} 3-4 & 4 & 1 \\ 0 & 4-4 & 0 \\ 1 & 4 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Isto é,

$$-x + 4\,y + z = 0, \quad x + 4\,y - z = 0.$$

Isto é,

$$y = 0, \quad x = z.$$

Ou seja, somente podemos escolher um autovetor linearmente independente associado a 4: $(t, 0, t)$, $t \neq 0$.

Os autovetores associados a 2 são a solução do sistema

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 4 & 1 \\ 0 & 4-2 & 0 \\ 1 & 4 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Isto é

$$x + 4\,y + z = 0, \quad y = 0.$$

Ou seja, somente podemos escolher um autovetor linearmente independente associado a 2: $(t, 0, -t)$, $t \neq 0$.

c) Considere a base $\gamma = \{u_1, u_2, u_3\}$. Sabemos que

$$T(u_1) = 4\,u_1, \quad T(u_2) = u_1 + 4\,u_2, \quad T(u_3) = 2\,u_3.$$

Para ver esta afirmação, por exemplo que $T(u_2) = u_1 + 4\,u_2$, observe que

$$(u_2)_\gamma = (0, 1, 0)$$

e que

$$(T(u_2))_\gamma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é

$$(T(u_2))_\gamma = (1,4,0), \quad T(u_2) = u_1 + 4\,u_2.$$

Em resumo, u_1 é um autovetor associado a 4, por exemplo $u_1 = (1,0,1)$, e u_3 é um autovetor associado a 2, por exemplo $u_3 = (1,0,-1)$. A seguir determinaremos u_2. Escrevemos $u_2 = (a,b,c)$. Temos que este vetor deve verificar

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$3\,a + 4\,b + c = 1 + 4\,a, \quad 4\,b = 4\,b, \quad a + 4\,b + 3\,c = 1 + 4\,c.$$

Isto é,

$$-a + 4\,b + c = 1 \quad a + 4\,b - c = 1.$$

Portanto,

$$2\,a - 2\,c = 0, \quad a = c.$$

Temos assim $b = 1/4$. Logo podemos escolher $u_2 = (t, 1/4, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Obtemos assim as bases

$$\gamma = \{(1,0,1); (t,1/4,t); (1,0,-1)\}.$$

d) Como a matriz é triangular, o único autovalor é 3. Escolhemos dois vetores linearmente independentes do plano π: $(1,-1,0)$ e $(0,0,1)$. Por hipótese se deve verificar

$$F(1,-1,0) = (3,-3,0), \quad F(0,0,1) = (0,0,3).$$

Por outra parte,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ d & 3 & 0 \\ c & c & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ d-3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo $d = 0$.

Observe que se $c = 0$ então a matriz é diagonal, de fato $3\,Id$, e em tal caso qualquer vetor não nulo é autovetor. Por outro lado, se $c \neq 0$,

$$3\,(356) \neq c\,(17 + 21) + 3\,(356),$$

e $(17, 21, 356)$ não é autovetor. Logo

$$c \neq 0, \quad d = 0.$$

---

3) Considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma matriz Q tal que a matriz produto

$$D = Q^t\,B\,Q$$

seja diagonal.

Resposta: O polinômio característico da matriz B é

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\,(\lambda^2 - 4\,\lambda + 3) + 2\,\lambda - 2 =$$

$$= -\lambda^3 + 6\,\lambda^2 - 9\lambda + 4 =$$

$$= -(\lambda - 4)\,(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda - 4)\,(\lambda - 1)^2.$$

Portanto, os autovalores são 4 (simples) e 1 (multiplicidade 2). Observe que este resultado é compatível com o traço da matriz 6 e o determinante 4.

Determinaremos os autovetores associados a 1. Para isso devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtemos que os vetores não nulos do plano

$$x + y + z = 0.$$

são autovetores de 1.

Observe que como os autovetores associados a 4 são ortogonais aos autovetores associados a 1, o vetor normal do plano $x+y+z=0$ é um autovetor associado a 4. Isto é, $(1,1,1)$ é um autovetor de 4.

Como para obter Q necessitamos uma base ortonormal de autovetores, escolhemos os autovetores

$$(1,0,-1), \quad (1,0,-1) \times (1,1,1) = (1,-2,1)$$

associados a 1. Normalizando os vetores $(1,-2,1), (1,0,-1)$ e $(1,1,1)$ obtemos uma base ortonormal η de autovetores de B:

$$\Big\{(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}); (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}); (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\Big\}$$

Escolhemos a forma diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

de B. Observamos que B na base η é dada por D. Assim escolhemos a matriz ortogonal

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(portanto, $Q^t = Q^{-1}$) e observamos que

$$B = Q\,D\,Q^t.$$

Portanto,

$$Q^t\, B\, Q = Q^t\, Q\, D\, Q^t\, Q,$$

como

$$Q^t\, Q = Q\, Q^t = Id,$$

obtemos

$$D = Q^t\, B\, Q.$$

---

4) Considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que é a composição de uma projeção ortogonal em um plano e uma rotação. Sabendo que a matriz de T na base canônica é escrita como o produto

Prova A:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Prova B:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Prova C:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Prova D:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Determine

- a equação cartesiana do plano de projeção;
- a equação paramétrica do eixo de rotação.

Usando a observação no enunciado, temos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta (prova tipo A): Considere a matriz ortogonal

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$T \;= P \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^t = P \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^t =$$

$$= P \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^t \quad P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^t.$$

Observe agora que

$$P \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^t$$

representa (na base canônica) uma rotação cujo eixo é a reta

$$(t, -t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe que

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^t$$

representa (na base canônica) uma projeção ortogonal no plano de vetor normal $(1, -1, -2)$, isto é, no plano $x - y - 2\,z = 0$.

Prova A:

- **plano de projeção:** $x - y - 2\,z = 0$,
- **eixo de rotação:** $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Prova B:

- **plano de projeção:** $x + y = 0$,
- **eixo de rotação:** $(t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Prova C:

- **plano de projeção:** $x - y + z = 0$,
- **eixo de rotação:** $(t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Prova D:

- **plano de projeção:** $x - y + z = 0$,
- **eixo de rotação:** $(t, -t, -2\,t)$, $t \in \mathbb{R}$.
