G3 de Álgebra Linear I – 2013.2

29 de novembro de 2013.

Gabarito

---

(1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que **todos** os vetores da forma

$$(t, -4t, 7t),\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$$

são autovetores de T e que $\lambda = 6$ é um autovalor de T:

(a) Determine **todos** os autovalores de T. Determine um autovalor de T^3.

Para achar os autovalores de T calcularemos primeiro o autovalor λ_1 associado aos autovetores paralelos ao vetor $\vec{u} = (1, -4, 7)$,

$$\begin{pmatrix} -8 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim temos que $\lambda_1 = 0$ é um autovalor.

Como $\lambda_2 = 6$ também é autovalor e o traço da matriz é a soma dos autovalores temos:

$$0 + 6 + \lambda_3 = \text{traço}([T]_\varepsilon) = -8 + 3 + 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_3 = -11.$$

Os autovalores são:

$$0, 6, -11.$$

Para determinar um autovalor de T^3 basta observar que se $\vec{u}$ é um autovetor de T associado a um autovalor λ então se verifica

$$T^3(\vec{u}) = T^2(\lambda\vec{u}) = \lambda T^2(\vec{u}) = \lambda T(\lambda\vec{u}) = \lambda^2 T(\vec{u}) = \lambda^3\vec{u}.$$

Assim λ^3 é um autovalor de T^3 associado a $\vec{u}$. Portanto, os autovalores de T^3 são

$$0 = 0^3, \quad 6^3, \quad (-11)^3.$$

(b) Determine, se possível, uma base ortonormal β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T. Escreva o vetor $(6, 8, 3)$ (que está escrito na base canônica) na base β.

Em primeiro lugar observamos que a matriz é simétrica, logo, ortogonalmente diagonalizável (possui uma base ortogonal de autovetores). Assim,

$$[T] = [B][D][B]^{-1},$$

onde $[D]$é uma matriz diagonal.

Calcularemos o autovetor associado a $\lambda = 6$. Estes autovetores são obtidos resolvendo o sistema:

$$\begin{pmatrix} -8 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obtemos:

$$\begin{cases} -8x + 5y + 4z = 6x \\ 5x + 3y + z = 6y \\ 4x - y = 6z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14x + 5y + 4z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \\ 4x - y - 6z = 0 \end{cases}$$

Logo os autovetores associados ao autovalor 6 são os vetores não nulos da forma:

$$\vec{u} = (t, 2t, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Para achar o autovetor associado ao autovalor $\lambda = -11$ podemos proceder como acima ou usar o fato da transformação linear possuir uma base ortogonal de autovetores ortogonais. Assim um autovetor associado a -11 pode ser obtido fazendo o produto vetorial dos autovetores já conhecidos $\vec{v} = (1, 2, 1)$ (associado a 6) e $\vec{u} = (1, -4, 7)$ (associado a 0). Portanto,

$$\vec{w} = (1, 2, 1) \times (1, -4, 7) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 7 \end{vmatrix} = (18, -6, -6).$$

Dividindo por -6 obtemos o autovetor $(-3, 1, 1)$ Assim obtemos uma base ortogonal de autovetores:

$$\beta = \Big\{ \Big(1, 2, 1\Big), \Big(1, -4, 7\Big), \Big(-3, 1, 1\Big) \Big\}.$$

Normalizando os vetores obtemos a base ortonormal de autovetores:

$$\beta = \Big\{ \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big), \Big(\frac{1}{\sqrt{66}}, \frac{-4}{\sqrt{66}}, \frac{7}{\sqrt{66}}\Big), \Big(\frac{-3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\Big) \Big\}.$$

Para escrever o vetor $(6, 8, 3)$ (que está escrito na base canônica) na base β construimos a matriz de mudança de base da base canônica ε para a base β, que é a matriz $[B]^{-1}$ na discussão no início do item. Observe que a matriz de mudança de base da base β para a base canônica e a matriz $[B]$ que tem colunas formadas pelos vetores da base β,

$$[B] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{66} & -3/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{6} & -4/\sqrt{66} & 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{6} & 7/\sqrt{66} & 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}.$$

Como esta matriz é ortogonal (pois temos uma base ortonormal) temos

$$[B^{-1}] = [B^t] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{66} & -4/\sqrt{66} & 7/\sqrt{66} \\ -3/\sqrt{11} & 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}.$$

Assim para escrever o vetor na base β basta fazer a multiplicação:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{66} & -4/\sqrt{66} & 7/\sqrt{66} \\ -3/\sqrt{11} & 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/\sqrt{6} \\ -5/\sqrt{66} \\ -7/\sqrt{11} \end{pmatrix}.$$

Logo:

$$(6,8,3)_\beta = (25/\sqrt{6}, -5/\sqrt{66}, -7/\sqrt{11}).$$

(c) Determine, se possível, uma matriz B tal que

$$B^t\,[T]_\varepsilon\,B$$

seja uma matriz diagonal.

Determine explicitamente a matriz B^{-1} inversa de B.

No item anterior já encontramos as matrizes $[B]$ e $[B]^{-1} = [B]^t$,

$$[B] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{66} & -3/\sqrt{11} \\ 2/\sqrt{6} & -4/\sqrt{66} & 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{6} & 7/\sqrt{66} & 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}$$

$$[B^t] = [B^{-1}] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{66} & -4/\sqrt{66} & 7/\sqrt{66} \\ -3/\sqrt{11} & 1/\sqrt{11} & 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}.$$

Assim

$$[T]_\beta = B^t \, [T]_\varepsilon \, B,$$

onde $[T]_\beta$ é a matriz diagonal formada pelos autovalores de T na ordem correspondente,

$$[T_\beta] = [D] = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

(d) Determine se existem bases γ e η de $\mathbb{R}^3$ onde a matrizes de T nessas bases sejam, respectivamente,

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad [T]_\eta = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Note que em caso em que as bases γ e η existissem as matrizes de T na base γ, ($[T]_\gamma$), e na base η, ($[T]_\eta$), seriam semalhantes a matriz na base canônica ($[T]_\varepsilon$) e portanto teriam o mesmo traço e os mesmos autovalores.

Observe que

$$\mathrm{tr}([T]_\varepsilon) = -5 \neq 0 = tr([T]_\gamma).$$

Portanto a base γ não existe.

Observe que $\mathrm{tr}([T]_\varepsilon) = -5 = tr([T]_\eta)$. Porém os autovalores de $[T]_\eta$ são $6, 1, -12$ que são diferentes dos autovalores de T. Portanto a base η não existe.

(e) Determine se existe uma base α de $\mathbb{R}^3$ onde a matriz de T nessa base seja

$$[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

Em caso afirmativo, determine dois vetores da base α.

A base α existe se, e somente se, a matriz $[T]_\alpha$ é semelhante a matriz $[T]_\varepsilon$. Temos que a matriz $[T]_\alpha$ tem os mesmos autovalores (com as mesmas multiplicidades, todos os autovalores são simples) que a matriz $[T]_\varepsilon$. Logo as duas matrizes têm a mesma forma diagonal D (formada pelos autovalores na ordem escolhida) existe uma matriz inversível $[S]$ tal que:

$$[T_\alpha] = [S][D][S]^{-1}.$$

Já sabemos que :

$$[T_\varepsilon] = [B][D][B]^{-1}, \qquad [D] = [B]^{-1}[T_\varepsilon][B].$$

Logo:

$$[T]_\alpha = [S][D][S]^{-1} = [S][B]^{-1}[T_\varepsilon][B][S]^{-1} = [Q][T_\varepsilon][Q]^{-1},$$

onde

$$[Q] = [S][B]^{-1}.$$

Portanto, a base α existe.

Observamos que os dois primeiros vetores da base α são autovetores de T associados aos autovalores 0 e 6, portanto

$$(1, -4, 7) \quad \text{e} \quad (1, 2, 1).$$

---

(2) Seja $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz na base canônica é:

$$[P]_\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & \frac{1}{3} & e \\ f & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

(a) Sabendo que P é uma uma projeção ortogonal em uma reta r, determine a, b, c, d, e e f.

Como a matriz representa uma projeção em reta, ela é uma matriz simétrica,

$$e = \frac{1}{3}.$$

Como a projeção ortogonal em uma reta tem autovalores 0, 0 e 1 temos

$$\text{traço}[P] = a + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 + 0 + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{3}.$$

A matriz fica então:

$$[P]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & d & f \\ d & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ f & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Usando novamente que P é uma uma projeção ortogonal em uma reta r, temos que as colunas da matriz $[P]$ são paralelas ao vetor diretor da reta r,

$$T(i) = mT(j) = nT(k).$$

Logo:

$$\left(\frac{1}{3}, d, f\right) = m\left(d, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Logo:

$$d = f = \pm\frac{1}{3}$$

Assim temos:

$$[P]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ou

$$[P]_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Determine uma equação paramétrica da reta r do item anterior.

Podemos ter :

$$r = (t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

ou

$$r = (-t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(c) Determine explicitamente **todas** as formas diagonais da transformação linear P.

A matriz de projeção ortogonal na reta é ortogonalmente diagonalizável. Com autovalores 0, 0 e 1. Logo existem três formas diagonais possíveis

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Determine explicitamente as matrizes:

$$[P]^{1000} + [P]^{1002} \qquad \text{e} \qquad [P]^{1005} - [P]^{1001}.$$

Escolhemos a forma diagonal

$$[D] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e observamos que qualquer natural $n \geq 1$ temos

$$[D]^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [D].$$

Observamos também que se $P = [S][D][S]^{-1}$, então

$$[P]^n = [S][D]^n[S]^{-1} = [S][D][S]^{-1} = P.$$

Logo:

$$[P]^{1000} + [P]^{1002} = [P] + [P] = 2[P]$$

Assim obtemos, segundo a escolha de $[P]$,

$$[P]^{1000} + [P]^{1002} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ou

$$[P]^{1000} + [P]^{1002} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

segundo a escolha de $[P]$.

Por outro lado

$$[P]^{1005} - [P]^{1001} = [P] - [P] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$