G3 de Álgebra Linear I – 2013.1

21 de junho de 2013.

Gabarito

---

(1) Considere a transformação linear $[T]: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que

$$\det([T - \lambda I]_\varepsilon) = p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)^2$$

(onde I representa a matriz identidade e det significa determinante), determine:

(a) Todos os autovetores de $[T]$ associados ao autovalor 2.

Para achar todos os autovetores associados ao autovalor 2 usamos a definição de autovetor:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + y = 2x \\ 2y + z = 2y \\ -3x - 3y - z = 2z \end{cases}$$

Temos então:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases}$$

Logo os autovetores associados ao autovalor 2 são os vetores

$$(t, -t, 0), \quad t \neq 0.$$

Observamos que necessariamente $t \neq 0$, pois $\overrightarrow{0}$ não é autovetor.

(b) Encontre, se possível, uma base β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $[T]$.

Não é possível achar uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

No item anterior vimos que o autovalor $\lambda = 2$ tem multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1, pois no máximo podemos obter um autovetor linearmente independente associado a 2. O autovalor $\lambda = 0$ tem multiplicidade algébrica 1, assim existe no máximo um autovetor linearmente independente associado a 0. Assim no máximo é possível ter dois autovetores linearmente independentes (um associado a autovalor 2 e outro associado a 0). Como as bases de $\mathbb{R}^3$ estão formadas por três vetores linearmente independentes não é possível achar uma base formada por autovetores de T.

(c) Encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de $[T]$ na base γ seja

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideramos a base γ

$$\gamma = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\},$$

A matriz na base γ nos fornece as seguintes relações.

$$\begin{aligned}
(T_\varepsilon(\overrightarrow{u}_1))_\gamma &= 2\overrightarrow{u}_1 + 1\overrightarrow{u}_2 + 0\overrightarrow{u}_3,\\
(T_\varepsilon(\overrightarrow{u}_2))_\gamma &= 0\overrightarrow{u}_1 + 2\overrightarrow{u}_2 + 0\overrightarrow{u}_3 = 2\overrightarrow{u}_2,\\
(T_\varepsilon(\overrightarrow{u}_3))_\gamma &= 0\overrightarrow{u}_1 + 0\overrightarrow{u}_2 + 0\overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

Logo os vetores $\overrightarrow{u}_2$ e $\overrightarrow{u}_3$ são autovetores da transformação associados respectivamente aos autovalores 2 e 0. O autovetores associados a 2 já foram calculados. Calcularemos a seguir os autovetores associados a 0.

Estes autovetores são obtidos resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -3x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Temos então:

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -2y - z = 0 \end{cases}$$

Logo os autovetores associados ao autovalor 0 são os vetores não nulos da forma $(-t, 3t, -6t)$, $t \neq 0$.

Assim a base β pode ser:

$$\beta = \{(x, y, z), (1, -1, 0), (1, -3, 6)\},$$

onde falta determinar o primeiro vetor. Pela definição da matriz $[T]_\gamma$ temos

$$(T_\varepsilon(x, y, z))_\beta = 2(x, y, z) + 1(1, -1, 0) + 0(1, -3, 6).$$

Isto é

$$(3x + y, 2y + z, -3x - 3y - z) = 2(x, y, z) + (1, -1, 0).$$

Assim:

$$x + y = 1, \quad z = -1, \quad -3x - 3y - 3z = 0.$$

Logo

$$x + y = 1, \quad z = -1.$$

Assim podemos escolher o vetor

$$(1, 0, -1)$$

obtendo a base

$$\gamma = \{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (1, -3, 6)\},$$

(d) Encontre a matriz de mudança de base da base γ para a base canônica ε.

As colunas da matriz $[Q]$ de mudança de base da base γ para a base canônica ε são formadas pelos vetores da base γ encontrada no ítem anterior. Logo temos:

$$[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(e) Encontre, se possível, uma base η (escrita na base canônica) de $\mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base η seja

$$[T]_\eta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Não existe a base η. Pois a matriz na base η, ($[T]_\eta$) seria semalhante a matriz na base canônica ($[T]_\varepsilon$). Logo

$$\mathrm{tr}([T]_\varepsilon) = tr([T]_\eta)$$

Obeservamos que os traços são diferentes.
($[T]_\varepsilon$)=4 e tr ($[T]_\eta$) = 6.

---

(2) Considere o espelhamento em relação a um plano $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é da forma

$$[Q] = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -1 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine a, b, c, d, e e.

Como a matriz de espelhamento no plano é uma matriz simétrica, temos:

$$a = -1, \quad d = 0.$$

Como a matriz é ortogonal (em particular os vetores coluna são unitários) temos

$$c = 0.$$

Como a matriz tem traço$[Q] = 1 + 1 - 1 = 1$ temos

$$0 + 0 + e = 1.$$

Usando novamente que a matriz é ortogonal temos

$$b = d = 0.$$

Assim temos que $e = 1$ e $c = 0$. Logo

$$[Q] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Determine a equação cartesiana do plano de espelhamento de Q.

Para achar o plano de espelhamento achamos os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$. Estes autovetores são paralelos a vetor normal do plano.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{l} -y = -x, \\ -x = -y, \\ z = 0, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0, \\ z = 0. \end{array} \right.$$

Os autovetores são

$$(t, t, 0), \quad t \neq 0.$$

Então o plano de espelhamento tem equação cartesiana:

$$x + y = 0.$$

(c) Determine explicitamente as matrizes:

$$[Q]^{1000} + [Q]^{1002} \qquad \text{e} \qquad [Q]^{1005} - [Q]^{1001}.$$

A matriz de espelhamento é ortogonalmente diagonalizável. Com autovalores -1, 1 e 1. Logo:

$$[Q] = [S][D][S^{-1}], \quad [D] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$[Q]^{1000} = [S][D^{1000}][S^{-1}] = Id,$$

pois

$$[D^2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, quando n é par então $[D^n]$ é a matriz identidade. Assim

$$[Q]^n = [S]\,[D^n]\,[S^{-1}] = Id,$$

Logo:

$$[Q]^{1000} + [Q]^{1002} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quando n é ímpar, $n = 2m + 1$, temos que:

$$[Q]^n = [S][D^{2m+1}][D][S^{-1}] = [S][D^{2m}][D][S^{-1}] = [S][D][S^{-1}] = [Q].$$

pois já vimos que $[D^{2m}] = Id$. Portanto,

$$[Q]^{1005} - [Q]^{1001} = [Q] - [Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Considere a transformação linear $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz $[M]$ na base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Determine todos os autovalores de M e as coordenadas (na base canônica) de um autovetor de M associado ao autovalor 3.

Considere a matriz

$$[P] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é ortogonal. Portanto

$$[M]_\varepsilon = [P]\,[B]\,[P]^t = [P]\,[B]\,[P]^{-1}$$

e assim $[M]$ é semelhante a $[B]$. Assim as duas matrizes tem os mesmos autovalores.

A matriz

$$[B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é triângular, assim temos os autovalores na diagonal principal. Como são distintos a matriz é diagonalizável. Logo os autovalores de $[M]$ são os mesmos de $[B]$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ e é diagonalizável.

Calcularemos agora o autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$.

Considere a base α:

$$\alpha = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$$

onde

- $\overrightarrow{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$,
- $\overrightarrow{u}_2 = (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$,
- $\overrightarrow{u}_3 = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}1/\sqrt{3})$.

A transaformação linear M (cuja matriz na base canônica é $[M]$) escrita na base α é a matriz $[B]$. Isto significa que

$$\begin{aligned} M(\overrightarrow{u}_1) &= \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 + 0\,\overrightarrow{u}_3, \\ M(\overrightarrow{u}_2) &= 0\,\overrightarrow{u}_1 + 3\,\overrightarrow{u}_2 + 0\,\overrightarrow{u}_3, \\ M(\overrightarrow{u}_3) &= 0\,\overrightarrow{u}_1 + 0\,\overrightarrow{u}_2 + 2\,\overrightarrow{u}_3. \end{aligned}$$

Portanto temos que $\overrightarrow{u}_2$ e $\overrightarrow{u}_3$ são autovetores associados a $\lambda = 3$ e a $\lambda = 2$, respectivamente.

Então os autovetors associado ao autovalor $\lambda = 3$ são os vetores da forma $(t, -t, -2t)$, $t \neq 0$.

(e) Considere uma matriz 3×3 $[S]$ inversível com inversa $[S]^{-1}$ e a matriz

$$[N] = [S]\,[M]^2\,[S]^{-1}.$$

Determine o traço de $[N]$.

Temos que a matriz $[N]$ pode ser escrita (lembrando que $[M] = [P]\,[B]\,[P]^{-1}$)

$$[N] = [S]\,[P]\,[B]\,[P]^{-1}\,[P]\,[B]\,[P]^{-1}\,[S]^{-1}.$$

Escrevendo $R = [S]\,[P]$ temos

$$[N] = [R]\,[B]^2\,[R]^{-1}.$$

Temos então que as matrizes $[N]$ e $[B]^2$ são semelhantes e em particular têm o mesmo traço. O autovalores de $[B]^2$ são $1^2 = 1$, $3^2 = 9$ e $2^2 = 4$. Logo o traço de $[B]^2$ (que é igual ao de N) é:

$$1 + 9 + 4 = 14.$$

(3) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

a) Decida se a matriz A é diagonalizável. Se a sua resposta for afirmativa, encontre matrizes S e D tais que

$$S^{-1} A\, S = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz é simétrica, logo é ortogonalmente diagonalizável. Os autovalores sáo as raízes do polinômio característico:

$$\det([A - \lambda I]) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 6 \\ 6 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)^2 - 36$$

Resolvendo a equação: $(10-\lambda)^2 - 36 = 0$ temos $(10-\lambda)^2 = 36$ e as soluções $(10-\lambda) = 6$ ou $(10-\lambda) = -6$. Logo temos os autovalores $\lambda_1 = 16$ e $\lambda_2 = 4$.

Calculando os autovetores:

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x + 6y = 4x \\ 6x + 10y = 4y \end{array} \right. , \qquad \left\{ \begin{array}{l} 6x + 6y = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{array} \right.$$

Logo os autovetores associados a $\lambda_2 = 4$ são vetores não nulos paralelos a $(t, -t)$.

Como a matriz é simétrica o autovetor associado a $\lambda_1 = 16$ é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u}_1 = (1, -1)$, podemos escolher $\overrightarrow{u}_2 = (1, 1)$.

Temos então uma base ortogonal de autovetores. Normalizando os vetores obtemos a base ortonormal de autovetores.

$$\beta = \left\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \right\},$$

Temos a matriz [S] (matriz ortogonal, $[S^{-1}] = [S^t]$) formada dos vetores da base β e a matriz [D] uma matriz diagonal formade de autovalores.

$$[S] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$[D] = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix},$$

$$[S^{-1}] = [S^t] = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

b) Considere a matriz:

$$E = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}.$$

Mostre que $(S\,E\,S^{-1})^2 = A$.

Tendo já visto no ítem anterior que:

$$A = S\,D\,S^{-1}.$$

Temos:

$$(S\,E\,S^{-1})^2 = (S\,E\,S^{-1}\,S\,E\,S^{-1}) = S\,E^2\,S^{-1}.$$

Como a matriz [E] uma matriz diagonal , temos que:

$$E^2 = \begin{bmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^2 & 0 \\ 0 & (\sqrt{\lambda_2})^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D$$

Assim temos

$$(S\,E\,S^{-1})^2 = S\,D\,S^{-1} = A.$$