P3 de Álgebra Linear I – 2008.2

Data: 22 de Novembro de 2010.

Gabarito.

Questão 1) Considere as transformações lineares

$$A, B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad C\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cujas matrizes na base canônica são, respectivamente,

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad [B] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad [C] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que a matriz $[A]$ nao é diagonalizável e que o vetor $v = (1, 1)$ é um autovetor de A, determine os valores de a e b.

b) Determine todos os autovalores de C.

c) Determine uma base β de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de C.

d) Determine uma base γ de $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de B na base γ seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(a) Observe que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

onde λ é o autovalor associado ao autovetor $(1,1)$. Portanto,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Assim $\lambda = 1$ e $a + b = \lambda = 1$.

Como a matriz $[A]$ não é diagonalizável, a única possibilidade é que o autovalor 1 tenha multiplicidade dois. Caso contrário a matriz teria dois autovalores diferentes e, como conseqüência, teria dois autovetores linearmente independentes e portanto uma base de autovetores. Logo, nesse caso, seria diagonalizável. Isto implica que

$$\text{traço}(A) = 1 + 1 = 2 = 2 + b.$$

Portanto, $b = 0$.

Falta determinar a. Como $a + b = a + 0 = 1$, temos $a = 1$. Observe também que o determinante de $[A]$ é o produto dos autovalores (contados com suas multiplicidades). Assim temos que $1 \cdot 1 = a$. Logo $a = 1$.

(b) Determinamos o polinômio característico de $[C]$,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} =& (1-\lambda)\big((-\lambda\,(3-\lambda)+6\big) - (-12+18-6\lambda) = \\
=& (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 6\right) - (6-6\lambda) = \\
=& (-\lambda^3 + 4\,\lambda^2 - 9\,\lambda + 6) - (6-6\lambda) = \\
=& -\lambda\,(\lambda^2 - 4\,\lambda + 3).
\end{aligned}$$

Portanto, os autovalores são $\lambda = 0$ e

$$\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1.$$

Logo os autovalores são

$$0, \qquad 3, \qquad 1.$$

(c) Devemos determinar os autovetores associados aos autovalores do item anterior.

autovetores associados a 0*:*

$$\begin{pmatrix} 1-0 & 0 & -1 \\ -2 & 3-0 & -1 \\ -6 & 6 & 0-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos o sistema

$$x - z = 0, \qquad 2\,x - 3\,y - z = 0, \qquad -6\,x + 6\,y = 0.$$

Da primeira e da última equação obtemos $x = z$ e $x = y$ (resultado que é compatível com a segunda equação). Assim obtemos o autovetor $(1,1,1)$.

autovetores associados a 3*:*

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & -1 \\ -2 & 3-3 & -1 \\ -6 & 6 & 0-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos o sistema

$$2\,x + z = 0, \quad 6\,x - 6\,y + 3\,z = 0.$$

Logo $z = -2\,x$ e

$$2\,x - 2\,y + z = 0, \qquad y = 0.$$

Portanto, $(1,0,-2)$ é um autovetor associado a 3.

autovetores associados a 1*:*

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ -2 & 3-1 & -1 \\ -6 & 6 & 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Temos $z = 0$ e $x = y$. Portanto, $(1,1,0)$ é um autovetor associado a 1.

Dos resultados acima obtemos a seguinte base β de autovetores da transformação linear C

$$\beta = \{(1,1,1), (1,0,-2), (1,1,0)\}.$$

(d) Seja $\gamma = \{v_1, v_2\}$ a base procurada. Como

$$[B]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

temos que estes vetores devem verificar

$$B(v_1) = v_1 + v_2, \qquad B(v_2) = v_2.$$

Portanto, o vetor v_2 é um autovetor de B associado ao autovalor 1. Calcularemos os autovetores associados a 1:

$$\begin{pmatrix} -1-1 & -1 \\ 4 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad 2\,x + y = 0.$$

Escolhemos o vetor $v_2 = (1, -2)$.

O vetor $v_1 = (x, y)$ deve verificar $B(v_1) = v_1 + v_2$. Portanto,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Isto é

$$-x - y = 1 + x, \qquad 4\,x + 3\,y = -2 + y.$$

Logo

$$-2\,x - y = 1, \qquad 4\,x + 2\,y = -2.$$

Assim, $2\,x + y = -1$. Por exemplo, podemos escolher $x = 0, y = -1$ obtendo o vetor $v_1 = (0, -1)$ e a base

$$\gamma = \{v_1 = (0, -1), v_2 = (1, -2)\}.$$

Questão 2) Considere a base ortonormal γ de $\mathbb{R}^3$

$$\gamma = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

a) Considere o vetor v cujas coordenadas na base canônica são $(257, 257, 257)$. Determine a primeira coordenada do vetor v na base γ.

Considere as transformações lineares

$$T, L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cujas matrizes na base γ são, respetivamente,

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [L]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Determine **explicitamente** a matriz de T na base canônica.

c) Determine uma base η de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores da transformação linear T (escritos na base canônica).

d) Seja $[L]$ a matriz da transformação linear L na base canônica. Determine todos os autovalores da matriz $[L]$.

Resposta:

a) Escrevemos

$$\gamma = \left\{ v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \right\}.$$

Observe que se as coordenadas do vetor v na base γ são $(v)_\gamma = (a, b, c)$ então se verifica

$$v = a\, v_1 + b\, v_2 + c\, v_3.$$

Como a base γ é ortonormal

$$a = v \cdot v_1 = (257, 257, 257) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{3\,(257)}{\sqrt{3}} = \frac{771}{\sqrt{3}}.$$

b) Consideramos a matriz ortogonal Q cujas colunas são os vetores da base ortonormal γ,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Pela definições de Q (matriz ortogonal) e $[T]_\gamma$, a matriz $[T]_\mathcal{E}$ de T na base canônica é

$$[T]_\mathcal{E} = Q\,[T]_\gamma\, Q^{-1} = Q\,[T]_\gamma\, Q^t.$$

Observe que

$$[T]_\gamma\, Q^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$[T]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Por construção, a base γ é uma base de autovetores de T.

d) Observe que matriz $[L]$ é semelhante a matriz $[L]_\gamma$:

$$[L] = Q\, [L]_\gamma\, Q^{-1}.$$

Portanto, têm os mesmos autovalares com as mesmas multiplicidades. Observe que o polinômio característico de $[L]_\gamma$ é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\,\lambda^2.$$

Logo os autovalores são

$$\lambda = 0 \quad \text{(multiplicidade dois)}, \qquad \lambda = 1$$

Questão 3)

a) Determine a inversa da matriz

prova tipo A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova tipo B:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova tipo C:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova tipo D:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = 3\,v$$

e a base

$$\beta = \{(1,1,1),(2,0,1),(3,1,0)\}.$$

Determine a matriz de T na base β, que denotaremos por $[T]_\beta$.

Resposta:

a) Desenvolvimento. Resposta (prova tipo A).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação (linha II) + (linha I):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação $\frac{1}{2}$ (linha II):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação (linha III) - (linha II):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação (linha I) - (linha III):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

operação (linha I) - 2 (linha II):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

prova tipo A:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

prova tipo B:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

prova tipo C:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

prova tipo D:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Escrevemos

$$\beta = \{w_1 = (1,1,1), w_2 = (2,0,1), w_3 = (3,1,0)\}.$$

Como

$$\begin{aligned} T(w_1) &= 3\,w_1 = 3\,w_1 + 0\,w_2 + 0\,w_3, \\ T(w_2) &= 3\,w_2 = 0\,w_1 + 3\,w_2 + 0\,w_3, \\ T(w_3) &= 3\,w_3 = 0\,w_1 + 0\,w_2 + 3\,w_3, \end{aligned}$$

temos que a matriz de T na base β é

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$