G2 de Álgebra Linear I – 2011.1
Gabarito

---

1)

a) Considere os planos de equações cartesianas

$$\pi_1\colon x+y+z=1, \qquad \pi_2\colon x+y+z=4.$$

Determine a equação cartesiana do plano ρ que é equidistante dos planos π_1 e π_2 (isto é, a distância entre os planos π_1 e ρ é igual à distância entre os planos π_2 e ρ e as distâncias entre estes três planos são todas diferentes de zero).

b) Considere as retas de equações paramétricas

$$r_1=(1+t,2+t,t), \quad t\in\mathbb{R},$$
$$r_2=(2\,t,1+t,a), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Determine, todos os valores de a para que a distância entre as retas r_1 e r_2 seja $\sqrt{5}$. Se não existir nenhum valor de a tal que a distância seja $\sqrt{5}$ justifique claramente o porquê.

c) Considere o ponto $P=(0,0,0)$. Determine o ponto da reta r_1 do item (b) mais próximo de P.

Resposta:

a) O plano ρ deve ser paralelo aos planos π_1 e π_2. Portanto, o plano ρ deve ser da forma

$$\rho\colon x+y+z=d.$$

Devemos determinar d para obter a condição de equidistância. Há diversas formas de resolver a questão. Consideramos uma reta r perpendicular aos planos, por exemplo,

$$r=(t,t,t), \quad t\in\mathbb{R}$$

e consideramos os pontos de interseção $P_1 = r \cap \pi_1$ e $P_2 = r \cap \pi_2$. O ponto médio M do segmento P_1P_2 deve pertencer ao plano ρ. Com esta condição determinamos o valor de d.

O ponto P_1 é obtido quando

$$t + t + t = 1, \quad t = 1/3, \quad P_1 = (1/3, 1/3, 1/3).$$

O ponto P_2 é obtido quando

$$t + t + t = 4, \quad t = 4/3, \quad P_2 = (4/3, 4/3, 4/3).$$

Portanto

$$M = \left(\frac{1/3 + 4/3}{2}, \frac{1/3 + 4/3}{2}, \frac{1/3 + 4/3}{2} \right) = (5/6, 5/6, 5/6).$$

Como $M \in \rho$

$$d = 5/6 + 5/6 + 5/6 = 5/2.$$

Logo

$$\rho \colon x + y + z = 5/2.$$

b) Consideramos vetores diretores $\bar{v}_1 = (1, 1, 1)$ de r_1 e $\bar{v}_2 = (2, 1, 0)$ de r_2 e os pontos $Q_1 = (1, 2, 0) \in r_1$ e $Q_2 = (0, 1, a)$. A distância d entre as retas r_1 e r_2 é dada pela fórmula

$$d = \frac{|\overline{Q_1Q_2} \cdot (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2)|}{||\bar{v}_1 \times \bar{v}_2||}.$$

Temos

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1).$$

Também temos

$$\overline{Q_1Q_2} = (-1, -1, a).$$

Finalmente,

$$|\overline{Q_1Q_2} \cdot (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2)| = |(-1, -1, a) \cdot (-1, 2, -1)| = |1 - 2 - a| = |1 + a|$$

e

$$||\bar{v}_1 \times \bar{v}_2|| = \sqrt{6}.$$

Portanto,

$$d = \sqrt{5} = \frac{|\overline{Q_1Q_2} \cdot (\bar{v}_1 \times \bar{v}_2)|}{||\bar{v}_1 \times \bar{v}_2||} = \frac{|1+a|}{\sqrt{6}}.$$

Temos

$$|1+a| = \sqrt{30}, \quad 1+a = \pm\sqrt{30}.$$

logo

$$a = -1 - \sqrt{30} \quad \text{e} \quad a = -1 + \sqrt{30}.$$

c) O ponto Q de r_1 mais próximo do ponto P é a interseção da reta r_1 e do plano τ que é perpendicular a r_1 e contém o ponto P. A equação cartesiana de τ é

$$\tau \colon x + y + z = 0.$$

A interseção de τ e r_1 ocorre quando o parámetro t verifica

$$(1+t) + (2+t) + t = 0, \qquad 3\,t = -3, \quad t = -1.$$

Portanto,

$$Q = (0, 1, -1).$$

---

2) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,2,1), \quad v_2 = (1,1,2), \quad v_3 = (1,3,0).$$

As coordenadas destes vetores estão escritas na base canônica.

(a) Determine a equação cartesiana do subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3.

(b) Considere o vetor w cujas coordenadas na base canônica são $w = (2,1,5)$. Determine uma base γ do subespaço $\mathbb{W}$ formada com vetores do conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ e as coordenadas do vetor w na base γ.

(c) Considere o vetor $v_4 = (a,b,c)$ (escrito na base canônica), a base de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{v_1, v_2, v_4\}$$

e o vetor $v = (1,1,1)$ (escrito na base canônica). Sabendo que as coordenadas de v na base β são $(v)_\beta = (1,1,1)$ determine os valores de a, b e c.

Resposta:

(a) Observe que os vetores $v_1 = (1, 2, 1)$ e $v_2 = (1, 1, 2)$ não são paralelos. Veja que eles geram o plano vetorial $\mathbb{U}$ cujo vetor normal é

$$n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, -1, -1),$$

isto é,

$$\mathbb{U}\colon 3\,x - y - z = 0.$$

Observe que o vetor $v_3 = (1, 3, 0)$ pertence ao plano $\mathbb{U}$:

$$3\,(1) - 3 - 0 = 3 - 3 = 0.$$

Portanto, $\mathbb{U} = \mathbb{W}$ e

$$\mathbb{W}\colon 3\,x - y - z = 0.$$

(b) É suficiente escolher dois vetores linearmente independentes do conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3\}$. Como estes vetores não são paralelos entre si, qualquer par de vetores $\{v_i, v_j\}$, $i \neq j$, é uma base de $\mathbb{W}$. Temos portanto seis possíveis bases (a ordem em uma base é importante)

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \{v_1, v_2\} = \{(1, 2, 1), (1, 1, 2)\},\\
\gamma_2 &= \{v_1, v_3\} = \{(1, 2, 1), (1, 3, 0)\},\\
\gamma_3 &= \{v_2, v_3\} = \{(1, 1, 2), (1, 3, 0)\},\\
\gamma_4 &= \{v_2, v_1\},\\
\gamma_5 &= \{v_3, v_1\},\\
\gamma_6 &= \{v_3, v_2\}.
\end{aligned}$$

Calcularemos as coordenadas de $w = (2, 1, 5)$ na base γ_1. Temos $(w)_{\gamma_1} = (a, b)$ onde

$$w = a\,v_1 + b\,v_2, \quad (2, 1, 5) = a\,(1, 2, 1) + b\,(1, 1, 2).$$

Logo

$$2 = a + b, \quad , 1 = 2\,a + b, \quad 5 = a + 2\,b.$$

Portanto, $a = -1$ e $b = 3$,

$$(w)_{\gamma_1} = (-1, 3).$$

(c) O fato de $(v)_\beta = (1,1,1)$ significa que

$$v = v_1 + v_2 + v_4.$$

Em coordenadas (na base canônica) isto significa que

$$(1,1,1) = (1,2,1) + (1,1,2) + (a,b,c).$$

Portanto

$$1 = 1 + 1 + a, \quad 1 = 2 + 1 + b, \quad 1 = 1 + 2 + c.$$

Logo

$$a = -1, \quad b = -2, \quad c = -2$$

e as coordenadas de v_4 na base canônica são

$$v_4 = (-1,-2,-2).$$

V. pode conferir que de fato que $\{v_1, v_2, v_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

---

3) Lembre que a imagem de uma transformação linear $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é definida como

$$\text{imagem}(S) = \{w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } v \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } w = S(v)\}$$

a) Considere a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & c \\ 2 & b & d \end{pmatrix}.$$

Sabendo que o espaço imagem de T é uma reta determine os valores de a, b, c e d.

b) Considere a transformação linear $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & A & C \\ 2 & B & D \end{pmatrix}.$$

Determine explicitamente valores A, B, C e D para que a imagem de L seja o plano de equação cartesiana

$$x + y - z = 0.$$

c) Considere a transformação linear $M\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica

$$M(1,1,1) = (0,1,1), \quad M(1,0,1) = (2,1,1), \quad M(0,1,1) = (0,1,1)$$

Determine a matriz de M na base canônica.

Resposta:

a) A imagem de T é gerada pelos vetores $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$. Como a imagem é uma reta estes vetores devem ser paralelos a $T(\mathbf{i}) = (1,1,2)$. Portanto,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{j}) &= (2,a,b) = k\,(1,1,2), \quad k=2, \quad a=2,\ b=4, \\ T(\mathbf{k}) &= (0,c,d) = k\,(1,1,2), \quad k=0, \quad c=0,\ d=0. \end{aligned}$$

Obtemos

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Raciocinando como no item anterior, os vetores $(1,1,2)$, $(0,A,B)$ e $(2,C,D)$ devem gerar o plano $x+y-z=0$. Portanto, é suficiente escolher três vetores do plano não paralelos entre si (se eles são paralelos obteremos uma reta como imagem). Uma possibilidade é

$$A = B = 0, \quad C = 0, D = 2.$$

Certamente, há outras possibilidades.... algumas delas...

$$\begin{aligned} A = B = 1, \quad C = -2, D = 0, \\ A = B = 1, \quad C = 1, D = 3. \end{aligned}$$

c)

$$M(1,1,1) = (0,1,1), \quad M(1,0,1) = (2,1,1), \quad M(0,1,1) = (0,1,1)$$

Devemos determinar $M(\mathbf{i})$, $M(\mathbf{j})$ e $M(\mathbf{k})$. Estes vetores serão as colunas da matriz de T na base canônica. Observe que

$$M(1,1,1) - M(1,0,1) = M(0,1,0) = (0,1,1) - (2,1,1) = (-2,0,0).$$

Temos também

$$M(0,1,0) + M(0,0,1) = M(0,1,1) = (0,1,1),$$

logo

$$M(0,0,1) = (0,1,1) - M(0,1,0) = (0,1,1) + (2,0,0) = (2,1,1).$$

Finalmente,

$$M(1,0,0) + M(0,0,1) = M(1,0,1) = (2,1,1),$$

logo

$$M(1,0,0) = (2,1,1) - M(0,0,1) = (2,1,1) - (2,1,1) = (0,0,0).$$

Portanto,

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

4)[1] Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4/9 & 10/9 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & -1/9 \\ c & d & 4/9 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a inversa da matriz A.

b) Sabemos que $C = B^{-1}$. Determine a, b, c e d.

Resposta:

a) Utilizaremos o método de Gauss para o cálculo da matriz inversa.

[1] Enunciado da prova A. No fim da resposta se encontra a solução das provas B, C e D

Início:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Operações: (I-linha)/2 − e III-linha− I-linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operações: troca de linhas II e III, troca de sinal de II

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operações: III-linha − I linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operações: III-linha − II linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operações: I-linha − III linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operações: I-linha − II linha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

prova C:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

prova D:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3/2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Sabemos que

$$B\,C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & b \\ a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/9 & 10/9 & 2/9 \\ -2/9 & 4/9 & -1/9 \\ c & d & 4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fazemos as seguintes operações para isolar as incógnitas:

- (II)-linha de $A \times$ (I)-coluna de B;

$$a\,(4/9) - 2/9 = 0, \quad a = 1/2,$$

- (I)-linha de $A \times$ (III)-coluna de B;

$$2/9 + 2/9 + (4/9)b = 0, \quad b = -1,$$

- (III)-linha de $A \times$ (I)-coluna de B;

$$2/9 + 2\,c = 0, \quad c = -1/9,$$

- (III)-linha de $A \times$ (II)-coluna de B;

$$-4/9 + 2\,d = 0, \quad d = 2/9.$$