Gabarito P2

Álgebra Linear I – 2008.2

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.

• Se $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependente então se verifica $\overrightarrow{v}_1 = \sigma\, \overrightarrow{v}_2$ para algum número real σ.

Falso. É suficiente considerar os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{v}_1 = (1,2)$, $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{0} = (0,0)$. Estes vetores são linearmente dependentes: $0\,\overrightarrow{v}_1 + 1\,\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{0}$. Obviamente, para todo número real σ se verifica $\sigma\,\overrightarrow{v}_2 = \bar{0} \neq \overrightarrow{v}_1$.

• Considere os subespaços vetorias de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{V} = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z)\colon x - y - z = 0\}, \qquad \mathbb{U} = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z)\colon x + y - z = 0\},$

e uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\mathbb{V}) = \mathbb{U} \quad \text{e} \quad T(\mathbb{U}) = \mathbb{V}.$$

A imagem de T é todo o espaço $\mathbb{R}^3$.

Verdadeiro. Considere o vetor $\overrightarrow{v}_=(1,0,1)$ que pertence à interseção dos sub-espaços $\mathbb{V}$ e $\mathbb{U}$ e os vetores $\overrightarrow{v}_2 = (1,1,0)$ de $\mathbb{V}$ e $\overrightarrow{v}_3 = (0,1,1)$ de $\mathbb{U}$. Estes três vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Por hipótese, $T(\mathbb{V}) = \mathbb{U}$ e $T(\mathbb{U}) = \mathbb{V}$, portanto estes três vetores são imagens de vetores $\overrightarrow{w}_1$, $\overrightarrow{w}_2$ e $\overrightarrow{w}_3$:

$$T(\overrightarrow{w}_i) = \overrightarrow{v}_i, \quad i = 1,2,3.$$

Isto automaticamente implica que a imagem de T é $\mathbb{R}^3$. Completaremos o argumento com detalhe. Dado qualquer vetor $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$ temos que, como os vetores $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3$ formam uma base e T é linear,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= \lambda_1\,\overrightarrow{v}_1 + \lambda_2\,\overrightarrow{v}_2 + \lambda_3\,\overrightarrow{v}_3 = \\ &= \lambda_1\,T(\overrightarrow{w}_1) + \lambda_2\,T(\overrightarrow{w}_2) + \lambda_3\,T(\overrightarrow{w}_3) = \\ &= T(\lambda_1\,\overrightarrow{w}_1 + \lambda_2\,\overrightarrow{w}_2 + \lambda_3\,\overrightarrow{w}_3) \\ &= T(\bar{w}),\end{aligned}$$

onde
$$\overrightarrow{w} = \lambda_1 \overrightarrow{w}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{w}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{w}_3.$$
Logo a imagem de T é todo o $\mathbb{R}^3$.

• Considere as retas r_1 que contém o ponto P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{v}$ e a reta r_2 que contém o ponto Q e é paralela ao vetor $\overrightarrow{w}$. Se
$$\overline{PQ} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = 0$$
então as retas r_1 e r_2 são concorrentes.

Falso. Duas retas paralelas r_1 e r_2 diferentes sempre verificam
$$\overline{PQ} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = 0.$$
Note que nesse caso temos $\overrightarrow{w} = \sigma \overrightarrow{v}$ e portanto $\overline{PQ} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = 0$.

• Considere os planos
$$\pi\colon x + y + z = 1, \qquad \rho\colon x + y + z = 0.$$
A distância entre π e ρ é 1.

Falso. Para calcular a distância consideramos qualquer ponto A de π, por exemplo $A = (1, 0, 0)$, e a reta r perpendicualar aos planos que contém o ponto A,
$$r = (1 + t, t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$
Determinanos o ponto B de interseção de r e ρ:
$$1 + t + t + t = 0, \quad t = -1/3, \quad B = (2/3, -1/3, -1/3).$$
A distância entre os planos é o módulo do vetor $\overline{BA} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Este vetor tem módulo $\sqrt{3}/3 = 1/\sqrt{3} \neq 1$.

• A transformação
$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (|x|, y),$$
verifica $T(0, 0) = (0, 0)$ e é linear.

Falso. Considere, por exemplo, $T(1,1) = (1,1)$ e $T(-1,-1) = (1,-1)$. Se T fosse linear
$$T((1,1) + (-1,-1)) = T(0,0) = (0,0),$$
e também
$$T((1,1)+(-1,-1)) = T(1,1)+T(-1,-1) = (1,1)+(1,-1) = (2,0) \neq (0,0).$$
Obtemos uma contradição.

Prova tipo A

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b	x		
1.c		x	
1.d		x	
1.e		x	

Prova tipo B

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	x		
1.b		x	
1.c		x	
1.d		x	
1.e		x	

Prova tipo C

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b		x	
1.c		x	
1.d		x	
1.e	x		

Prova tipo D

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a		x	
1.b		x	
1.c		x	
1.d	x		
1.e		x	

---

2)

Prova tipo A:

a) Considere a base

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1 = (1,0,1), \overrightarrow{u}_2 = (2,1,1), \overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ (as coordenadas dos vetores da base β estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$). Considere o vetor $\overrightarrow{v}$ cujas coordenadas na base canônica são $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{E}} = (4,1,2)$. Sabendo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_{\beta} = (2,1,1)$$

determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)$ na base canônica.

b) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

e sua imagem é o plano vetorial $\mathbb{V}$ cujos vetores $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ verificam $x+y+z=0$. Determine **explicitamente** valores para a, b, c e d.

c) Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{W} = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y - z = 0\},$$

a base de $\mathbb{W}$

$$\gamma = \{(1, 1, 2), (0, 1, 1)\}$$

e o vetor $\overrightarrow{v} = (3, 1, 4)$ de $\mathbb{W}$ (as coordenadas dos vetores da base γ e do vetor $\overrightarrow{v}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{v})_\gamma$ do vetor $\overrightarrow{v} = (3, 1, 4)$ na base γ.

Prova tipo B:

a) Considere a base

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1 = (0, 1, 1), \overrightarrow{u}_2 = (1, 2, 1), \overrightarrow{u}_3 = (a, b, c)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ (as coordenadas dos vetores da base β estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$). Considere o vetor $\overrightarrow{v}$ cujas coordenadas na base canônica são $(\overrightarrow{v})_\mathcal{E} = (1, 4, 2)$. Sabendo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_\beta = (1, 2, 1)$$

determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}_3 = (a, b, c)$ na base canônica.

b) Considere uma transformação linear $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base canônica é

$$[T]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

e sua imagem é o plano vetorial $\mathbb{V}$ cujos vetores $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ verificam $x - y + z = 0$. Determine **explicitamente** valores para a, b, c e d.

c) Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{W} = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y - z = 0\},$$

a base de $\mathbb{W}$

$$\gamma = \{(1, 1, 2), (1, 0, 1)\}$$

e o vetor $\overrightarrow{v} = (1, 3, 4)$ de $\mathbb{W}$ (as coordenadas dos vetores da base γ e do vetor $\overrightarrow{v}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{v})_\gamma$ do vetor $\overrightarrow{v} = (1, 3, 4)$ na base γ.

Prova tipo C:

a) Considere a base

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1 = (1,0,1), \overrightarrow{u}_2 = (1,1,2), \overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ (as coordenadas dos vetores da base β estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$). Considere o vetor $\overrightarrow{v}$ cujas coordenadas na base canônica são $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{E}} = (2,1,4)$. Sabendo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_\beta = (1,1,2)$$

determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)$ na base canônica.

b) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

e sua imagem é o plano vetorial $\mathbb{V}$ cujos vetores $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ verificam $x - y + z = 0$. Determine **explicitamente** valores para a, b, c e d.

c) Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{W} = \{\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y - z = 0\},$$

a base de $\mathbb{W}$

$$\gamma = \{(2,1,1), (1,1,0)\}$$

e o vetor $\overrightarrow{v} = (4,1,3)$ de $\mathbb{W}$ (as coordenadas dos vetores da base γ e do vetor $\overrightarrow{v}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{v})_\gamma$ do vetor $\overrightarrow{v} = (4,1,3)$ na base γ.

Prova tipo D:

a) Considere a base

$$\beta = \{\overrightarrow{u}_1 = (1,1,0), \overrightarrow{u}_2 = (2,1,1), \overrightarrow{u}_3 = (a,b,c)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ (as coordenadas dos vetores da base β estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$). Considere o vetor $\overrightarrow{v}$ cujas coordenadas na base canônica são $(\overrightarrow{v})_{\mathcal{E}} = (4, 2, 1)$. Sabendo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_{\beta} = (2, 1, 1)$$

determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}_3 = (a, b, c)$ na base canônica.

b) Considere uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a matriz de T na base canônica é

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & a \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

e sua imagem é o plano vetorial $\mathbb{V}$ cujos vetores $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ verificam $x - y - z = 0$. Determine **explicitamente** valores para a, b, c e d.

c) Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{W} = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x - y + z = 0\},$$

a base de $\mathbb{W}$

$$\gamma = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1)\}$$

e o vetor $\overrightarrow{v} = (3, 4, 1)$ de $\mathbb{W}$ (as coordenadas dos vetores da base γ e do vetor $\overrightarrow{v}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Determine as coordenadas $(\overrightarrow{v})_{\gamma}$ do vetor $\overrightarrow{v} = (3, 4, 1)$ na base γ.

Respostas:

(a)

(Prova tipo A) $\overrightarrow{u}_3 = (0, 0, -1)$.

(Prova tipo B) $\overrightarrow{u}_3 = (-1, -1, -1)$.

(Prova tipo C) $\overrightarrow{u}_3 = (0, 0, 1/2)$.

(Prova tipo D) $\overrightarrow{u}_3 = (0, -1, 0)$.

(b)

(Prova tipo A) $b = 0$, $c = 0$, $a + d = -1$ e $d \neq 0$.

(Prova tipo B) $b = 0$, $c = 0$, $a - d = 1$ e $d \neq 0$.

(Prova tipo C) $b = -2$, $c = -2$, $a - d = 1$ e $d \neq 2$.

(Prova tipo D) $b = 2$, $c = 2$, $a + d = 1$ e $d \neq 2$.

(c)

(Prova tipo A) $(\overrightarrow{v})_\gamma = (3, -2)$.

(Prova tipo B) $(\overrightarrow{v})_\gamma = (3, -2)$.

(Prova tipo C) $(\overrightarrow{v})_\gamma = (3, -2)$.

(Prova tipo D) $(\overrightarrow{v})_\gamma = (3, -2)$.

---

3) Considere uma base $\beta = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Prove que

$$\gamma = \{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3\}$$

também é uma base de $\mathbb{R}^3$.

b) Suponha que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_\beta = (1, 2, 1).$$

Determine as coordenadas de $(\overrightarrow{v})_\gamma = (y_1, y_2, y_3)$ de $\overrightarrow{v}$ na base γ.

c) Considere o subespaço vetorial

$$\mathbb{W} = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - y - z = 0\}$$

e o vetor $\overrightarrow{u} = (2, 1, 1)$ de $\mathbb{W}$ (as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ estão escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Determine uma base ϱ de $\mathbb{W}$ tal que as coordenadas $(\overrightarrow{u})_\varrho$ de $\overrightarrow{u}$ na base ϱ sejam $(\overrightarrow{u})_\varrho = (2, 0)$ (as coordenadas dos vetores da base ϱ devem estar escritas na base canônica $\mathcal{E}$).

Resposta:

(a) É suficiente verificar que os vetores

$$\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3$$

são linearmente independentes (três vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ formam uma base). Para isso, veremos que a única combinação linear destes vetores dando o vetor nulo é a trivial. Escrevemos

$$\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{u}_2 + \lambda_3 (\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3) = \overrightarrow{0}.$$

Isto é equivalente a

$$(\lambda_1 + \lambda_3) \overrightarrow{u}_1 + (\lambda_2 + \lambda_3) \overrightarrow{u}_2 + \lambda_3 \overrightarrow{u}_3 = \overrightarrow{0}.$$

Como os vetores $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$ são linearmente independentes temos que

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Portanto, necessariamente, se verifica

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

e os vetores são linearmente independetes.

(b) Da definição de coordenadas em uma base

$$\overrightarrow{v} = y_1 \overrightarrow{u}_1 + y_2 \overrightarrow{u}_2 + y_3 (\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3).$$

Isto é equivalente a

$$\overrightarrow{v} = (y_1 + y_3) \overrightarrow{u}_1 + (y_2 + y_3) \overrightarrow{u}_2 + y_3 \overrightarrow{u}_3.$$

Da unicidade de coordenadas em uma base e de $(\overrightarrow{v})_\beta = (1, 2, 1)$ obtemos que

$$y_1 + y_3 = 1, \quad y_2 + y_3 = 2, \quad y_3 = 1.$$

Portanto

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 1.$$

(c) Devemos encontrar dois vetores linearmente independentes $\overrightarrow{w}_1$ e $\overrightarrow{w}_2$ de $\mathbb{W}$ tais que

$$\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{w}_1 + 0\overrightarrow{w}_2.$$

Nesse caso a base é

$$\varrho = \{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{w}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} = (1, 1/2, 1/2).$$

Assim, $\overrightarrow{w}_2$ pode ser qualquer vetor de $\mathbb{W}$ não nulo e não paralelo a $\overrightarrow{w}_1$.

Algumas possibilidades (há infinitas) são

$$\begin{aligned}
\varrho &= \{\overrightarrow{w}_1 = (1, 1/2, 1, 2), \overrightarrow{w}_2 = (1, 1, 0)\},\\
\varrho &= \{\overrightarrow{w}_1 = (1, 1/2, 1, 2), \overrightarrow{w}_2 = (0, 1, -1)\},\\
\varrho &= \{\overrightarrow{w}_1 = (1, 1/2, 1, 2), \overrightarrow{w}_2 = (1, 0, 1)\}.
\end{aligned}$$

---

4) Considere a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que verifica

$$T(1, 1, 0) = (2, 2, 1), \quad T(1, 0, 1) = (3, 4, 2), \quad T(0, 1, 1) = (3, 2, 1).$$

a) Determine a matriz de T na base canônica.

b) Determine o conjunto $\mathbb{U}$ de vetores $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ que verificam

$$T(\overrightarrow{w}) = (2, 2, 2).$$

c) Determine a imagem $\mathrm{im}(T(\mathbb{R}^3))$ de T,

$$\mathrm{im}(T(\mathbb{R}^3)) = \{\overrightarrow{v} \text{ tal que existe } \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \overrightarrow{v} = T(\overrightarrow{w})\}.$$

Resposta:

(a) Devemos determinar $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$. Para determinar $T(1,0,0)$ escrevemos

$$(1,0,0) = x\,(1,1,0) + y\,(1,0,1) + z\,(0,1,1).$$

Obtemos o sistema linear de equações

$$1 = x + y, \quad 0 = x + z, \quad 0 = y + z.$$

Escalonando obtemos,

$$1 = x + y, \quad -1 = -y + z, \quad 0 = y + z.$$

e

$$1 = x + y, \quad -1 = -y + z, \quad -1 = 2\,z.$$

Portanto

$$z = -1/2, \quad x = 1/2, \quad y = 1/2.$$

Logo

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}\big((1,1,0) + (1,0,1) - (0,1,1)\big).$$

Como T é linear,

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= \tfrac{1}{2}\big(T(1,1,0) + T(1,0,1) - T(0,1,1)\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\big((2,2,1) + (3,4,2) - (3,2,1)\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\,(2,4,2) = (1,2,1). \end{aligned}$$

Da linearidade de T obtemos também

$$(2,2,1) = T(1,1,0) = T(1,0,0) + T(0,1,0) = (1,2,1) + T(0,1,0).$$

Logo

$$T(0,1,0) = (1,0,0).$$

Analogamente,

$$(3,2,1) = T(0,1,1) = T(0,1,0) + T(0,0,1) = (1,0,0) + T(0,0,1).$$

Logo

$$T(0,0,1) = (2,2,1).$$

Portanto, a matriz de T na base canônica é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique seu resultando aplicando esta matriz aos vetores $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ e $(0,1,1)$.

(b) Para determinar $\overrightarrow{w} = (x,y,z)$ devemos resolver o sistema linear de equações

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$x + y + 2\,z = 2, \quad 2\,x + 2\,z = 2, \quad x + z = 2.$$

As duas últimas equações implicam que o sistema é impossível (escalonando obtemos $0 = -1$). Portanto o sistema é impossível e não existe nenhum vetor $\overrightarrow{w}$ tal que $T(\overrightarrow{w}) = (2,2,2)$.

(c) A imagem $\mathrm{im}(T(\mathbb{R}^3))$ de T é gerada pelos vetores $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ e $T(0,0,1)$, ou seja, pelos vetores $(1,2,1)$, $(1,0,0)$ e $(2,2,1)$. Observe que os dois primeiros vetores geram o plano vetorial $\mathbb{W}$ cujo vetor normal é

$$(1,2,1) \times (1,0,0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,1,-2).$$

Isto é,

$$\mathbb{W}\colon y - 2\,z = 0.$$

Observe que $T(0,0,1) = (2,2,1)$ pertence ao plano $\mathbb{W}$. Portanto, a imagem de T é

$$\mathrm{im}(T(\mathbb{R}^3)) = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z)\colon y - 2\,z = 0\}.$$

Dois comentários:

1. V. pode responder ao item (b) usando este resultado: como o vetor $(2,2,2)$ não pertence a imagem de T não existe nenhum vetor $\overrightarrow{w}$ tal que $T(\overrightarrow{w}) = (2,2,2)$.

2. Para resolver o item (c) v. não necessita usar a base canônica, pode usar as imagens de qualquer base, por exemplo as imagens da base $\beta = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ que são dadas no enunciado.