G2 de Álgebra Linear I – 2008.1

Gabarito

---

1) Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa e marque **<u>COM CANETA</u>** sua resposta no quadro a seguir.

Itens	**V**	**F**	**N**
1.a	x		
1.b		x	
1.c	x		
1.d		x	
1.e	x		

1.a) Suponha que a distância entre as retas r e s de $\mathbb{R}^3$ é 7. Então podemos encontrar pontos $P \in r$ e $Q \in s$ tal que a distância entre P e Q seja 21.

Resposta: Verdadeiro. Defina P como o ponto da reta r mais próximo da reta s. Então a esfera de raio 21 centrada no ponto P intercepta a reta s em exatamente dois pontos. É suficiente escolher Q como um desses pontos.

1.b) Considere:

- a reta r que contém o ponto P e é paralela ao vetor não nulo $\overrightarrow{v}$,
- a reta s que contém o ponto Q e é paralela ao vetor não nulo $\overrightarrow{w}$.

Se o produto misto

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = 0$$

então as retas r e s são reversas.

Resposta: Falso. Considere duas retas paralelas diferentes (por exemplos $r\colon (1+t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ e $s\colon (\mu, \mu, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Tomando $P = (1,0,0)$, $Q = (0,0,0)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} = (1,1,1)$ temos $\overline{PQ} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = 0$ e as retas não são reversas.

1.c) Se $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ são vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ então

$$\eta = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resposta: Verdadeiro. Para ver que η é uma base é suficiente verificar que o produto misto do seus três elementos é não nulo:

$$(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) \cdot (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) \neq 0.$$

Como os vetores $\overrightarrow{v}_1$ e $\overrightarrow{v}_2$ são linearmente independentes temos

$$\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}.$$

Portanto,

$$(\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) \cdot (\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2) = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{w}|^2 \neq 0.$$

1.d) Considere os planos

$$\pi\colon x + y + z = 0, \qquad \rho\colon x - y - z = 0.$$

Se $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ é uma base de π e $\{\overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2\}$ é uma base de ρ, então $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{w}_1\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Resposta: Falso. Considere, por exemplo, as bases

$$\{\overrightarrow{v}_1 = (1,-1,0); \overrightarrow{v}_2 = (0,1,-1)\}$$

de π e

$$\{\overrightarrow{w}_1 = (0,1,-1); \overrightarrow{w}_2 = (1,1,0)\}$$

de ρ. Obviamente

$$\{(1,-1,0);(0,1,-1);(0,1,-1)\}$$

não é uma base de $\mathbb{R}^3$. Ou seja, é suficiente tomar w_1 sendo um vetor paralelo à reta interseção dos dois planos.

1.e) Considere o ponto $A=(5,-3,2)$ e reta r de equações paramétricas

$$(1+t,1-t,2\,t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

O ponto $B=(3,-1,4)$ é o ponto da reta r mais próximo do ponto A.

Resposta: Verdadeiro. O ponto B da reta r é o ponto mais próximo de A se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{BA}=(2,-2,-2)$ for perpendicular ao vetor diretor $(1,-1,2)$ da reta r. Como se verifica

$$(2,-2,-2)\cdot(1,-1,2)=0$$

(isto é, $\overrightarrow{BA}=(2,-2,-2)$ é perpendicular ao vetor $(1,-1,2)$) a resposta é afirmativa.

---

2)

(a) Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta=\{(1,1,0);(1,0,1);(0,1,1)\}$$

Sabendo que as coordenadas $(\overrightarrow{v})_\beta$ do vetor $\overrightarrow{v}$ na base β são

$$(\overrightarrow{v})_\beta=(2,1,1),$$

determine as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ na base canônica.

(b) Seja $\alpha=\{\overrightarrow{u}_1,\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a nova base de $\mathbb{R}^3$

$$\delta=\{\overrightarrow{u}_1+\overrightarrow{u}_2,\overrightarrow{u}_2+\overrightarrow{u}_3,\overrightarrow{u}_3+\overrightarrow{u}_1\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor w na base α são

$$(\overrightarrow{w})_\alpha = (3,3,4),$$

determine as coordenadas $(\overrightarrow{w})_\delta$ de $\overrightarrow{w}$ na base δ.

(c) Determine k para que os vetores

$$(1,2,1); (2,k,1); (k,3,k)$$

não formem uma base de $\mathbb{R}^3$.

d) Determine a equação cartesiana do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores

$$\{(1,1,0); (1,0,1); (2,1,1); (0,0,0); (2,4,-2)\}.$$

e) Considere o plano

$$\pi\colon x - y + 2\,z = 0$$

e sua base

$$\gamma = \{(1,1,0); (2,0,-1)\}.$$

Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = (4,2,-1)$ do plano π na base γ.

Resposta:

2.a) Escrevemos

$$\overrightarrow{v} = 2\,(1,1,0) + 1\,(1,0,1) + 1\,(0,1,1) = (3,3,2),$$

onde todos os vetores estão escritos na base canônica. Portanto, as coordenadas de v na base canônica são

$$\overrightarrow{v} = (3,3,2).$$

2.b) Sejam $(\overrightarrow{w})_\delta = (x,y,z)$ as coordenadas de $\overrightarrow{w}$ na base δ. Portanto,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w} &= x\,(\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2) + y\,(\overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3) + z\,(\overrightarrow{u}_3 + \overrightarrow{u}_1) = \\ &= (x+z)\,\overrightarrow{u}_1 + (x+y)\,\overrightarrow{u}_2 + (y+z)\,\overrightarrow{u}_3.\end{aligned}$$

Como, por hipótese as coordenas de w na base α são $(3, 3, 4)$,

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{3}\, u_1 + 3\, \overrightarrow{u}_2 + 4\, \overrightarrow{u}_3.$$

Lembrando que as coordenadas de um vetor em uma base (no caso na base α) são únicas, temos:

$$3 = x + z, \quad 3 = x + y, \quad 4 = y + z.$$

Portanto,

$$z - y = 0, \quad z = y, \quad z = y = 2, \quad x = 1.$$

Logo

$$(\overrightarrow{w})_\delta = (1, 2, 2).$$

2.c) Para que os vetores não formem uma base não devem ser linearmente independentes. Ou seja,

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & k & 3 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k^2 - 3) - 2\,(2\,k - 3) + k\,(2 - k) = -2\,k + 3 = 0.$$

Portanto,

$$k = 3/2.$$

2.d) Os vetores $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ geram o plano vetorial ϱ de vetor normal

$$(1, 1, 0) \times (1, 0, 1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, -1).$$

Isto é, geram o plano ϱ de equação cartesiana

$$\varrho\colon x - y - z = 0.$$

Os vetores $(2, 1, 1)$, $(0, 0, 0)$ e $(2, 4, -2)$ verificam a equação cartesiana de ϱ, portanto pertencem ao plano. Assim, os vetores geram o plano ϱ.

2.e) Sejam $(\bar{v})_\gamma = (x, y)$ as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v} = (4, 2, -1)$ na base

$$\gamma = \{(1, 1, 0); (2, 0, -1)\}.$$

Então
$$(4,2,-1) = x\,(1,1,0) + y\,(2,0,-1).$$
Isto é,
$$4 = x + 2\,y, \quad 2 = x, \quad -1 = -y.$$
Como o vetor $\overrightarrow{v}$ está no plano π e γ é uma base do plano, estes resultados são compatíveis com a primeira equação (verifique!). Portanto,
$$(\overrightarrow{v})_\gamma = (2,1).$$

---

3) Considere o vetor $(1,2,3)$ e a transformação linear
$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \times (1,2,3).$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Estude se existe $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que
$$T(\overrightarrow{w}) = (1,2,3).$$
Caso exista dito vetor $\overrightarrow{w}$ determine-o explicitamente.

(c) Determine a equação cartesiana da imagem de T (denotada $\mathrm{im}(T)$). Lembre que
$$\mathrm{im}(T) = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\}.$$

(d) Considere o plano $\pi\colon a\,x + y + z = 0$. Determine a para que $T(\pi)$ (a imagem do plano π pela transformação linear T) seja uma reta r. Determine a equação paramétrica da reta r.

Resposta:

3.a) Observe que
$$T(x,y,z) = (x,y,z) \times (1,2,3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3\,y - 2\,z, -3\,x + z, 2\,x - y).$$

Logo
$$T(\mathbf{i}) = (0,-3,2), \quad T(\mathbf{j}) = (3,0,-1), \quad T(\mathbf{k}) = (-2,1,0)$$
Portanto
$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.b) Não existe tal vetor $\overrightarrow{w}$, pois $T(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w} \times (1,2,3)$, e portanto $T(\overrightarrow{w})$ é ortogonal ao vetor $(1,2,3)$. Obviamente, v. pode tentar achar $\overrightarrow{w} = (x,y,z)$ resolvendo explicitamente o sistema linear dado pela condição
$$T(x,y,z) = (x,y,z) \times (1,2,3) = (1,2,3),$$
isto é
$$3\,y - 2\,z = 1, \quad -3\,x + z = 2, \quad 2\,x - y = 3$$
e ver que o sistema não tem solução. Deixamos v. verificar estes detalhes.

3.c) A imagem de T é gerada pelos vetores coluna da matriz $[T]$, isto é, pelos vetores $(0,-3,2)$, $(3,0,-1)$ e $(-2,1,0)$. Os dois primeiros vetores geram o plano vetorial ϱ de vetor normal
$$(0,-3,2) \times (3,0,-1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (3,6,9).$$
Isto é,
$$\varrho \colon x + 2\,y + 3\,z = 0$$
O vetor $(-2,1,0)$ pertence ao plano ϱ. Logo
$$T(\mathbb{R}^3) \colon x + 2\,y + 3\,z = 0.$$

3.d) A imagem $T(\pi)$ está gerada pelas imagens de uma base (qualquer) de π. Escolhemos a base do plano π
$$\{(1,-a,0);(0,1,-1)\}.$$
Portanto $T(\pi)$ é gerado por
$$T(1,-a,0) = (-3\,a,-3,2+a) \quad \text{e} \quad T(0,1,-1) = (5,-1,-1).$$

Para que $T(\pi)$ seja uma reta é necessário (e suficiente) que $T(1,-a,0) = (-3\,a, 3, 2+a)$ e $T(0,1,-1) = (5,-1,-1)$ sejam paralelos, isto é,

$$(-3\,a, -3, 2+a) = \lambda\,(5,-1,-1).$$

Obtemos $\lambda = 3$ e $a = -5$. Observe que estas condições são compatíveis com $2-5=3$.

Logo o plano é $-5\,x + y + z = 0$ e sua imagem é a reta de vetor diretor $(5,-1,-1)$ que contém a origem, isto é,

$$r\colon (5\,t, -t, -t), \quad t \in \mathbb{R}.$$