G2 de Álgebra Linear I – 2007.2
Gabarito

---

1) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,2,1), \quad v_2 = (1,-1,2), \quad v_3 = (0,3,-1).$$

(a) Determine a equação cartesiana do subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3.

(b) Determine uma base γ do subespaço $\mathbb{W}$ formada com vetores do conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ e as coordenadas do vetor $(2,1,3)$ nessa base γ.

(c) Determine uma base $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que os vetores da base sejam unitários,

- w_1 seja paralelo a v_1,
- w_2 esteja no plano gerado por v_1 e v_2 e seja perpendicular a w_1 e
- w_3 seja perpendicular a w_1 e w_2.

(d) Considere o vetor $v_4 = (a,b,c)$. Determine a, b e c para que

$$\alpha = \{v_1, v_2, v_4\}$$

seja uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que as coordenadas do vetor $u = (4,3,1)$ na base α sejam $(u)_\alpha = (2,1,1)$.

Resposta:

(a) Observe que os vetores $v_1 = (1,2,1)$ e $v_2 = (1,-1,2)$ não são paralelos. Veja que eles geram o plano vetorial $\mathbb{U}$ cujo vetor normal é

$$n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (5,-1,-3),$$

isto é,

$$\mathbb{U}\colon 5\,x - y - 3\,z = 0.$$

Observe que o vetor $v_3 = (0, 3, -1)$ pertence ao plano $\mathbb{U}$:

$$0 - (3) - 3\,(-1) = -3 + 3 = 0.$$

Portanto, $\mathbb{U} = \mathbb{W}$ e

$$\mathbb{W}\colon 5\,x - y - 3\,z = 0.$$

(b) É suficiente escolher dois vetores linearmente independentes do plano

$$\mathbb{W}\colon 5\,x - y - 3\,z = 0.$$

Por exemplo $(1, 2, 1)$ e $(1, -1, 2)$, obtendo a base

$$\gamma = \{(1, 2, 1), (1, -1, 2)\}.$$

As coordenadas do vetor $(2, 1, 3)$ na base γ são (x, y), onde

$$(2, 1, 3) = x\,(1, 2, 1) + y\,(1, -1, 2),$$

logo

$$2 = x + y, \quad 1 = 2\,x - y, \quad 3 = x + 2\,y.$$

Assim (terceira menos primeira)

$$y = 1.$$

Também temos $x = 1$. Assim,

$$(2, 1, 3)_\gamma = (1, 1).$$

Se consideramos a base

$$\gamma = \{(1, -1, 2), (0, 3, -1)\},$$

temos que as coordenadas do vetor $(2, 1, 3)$ na base γ são (x, y), onde

$$(2, 1, 3) = x\,(1, -1, 2) + y\,(0, 3, -1).$$

Obtemos o sistema

$$2 = x, \quad 1 = -x + 3\,y, \quad 3 = 2\,x - y.$$

Resolvendo o sistema obtemos $x = 2$ e $y = 1$, portanto,

$$(2,1,3)_\gamma = (2,1).$$

Finalmente, se consideramos a base

$$\gamma = \{(1,2,1),(0,3,-1)\},$$

temos que as coordenadas do vetor $(2,1,3)$ na base γ são (x,y), onde

$$(2,1,3) = x\,(1,2,1) + y\,(0,3,-1).$$

Obtemos o sistema

$$2 = x, \quad 1 = 2\,x + 3\,y, \quad 3 = x - y.$$

Resolvendo o sistema obtemos $x = 2$ e $y = -1$, assim

$$(2,1,3)_\gamma = (2,-1).$$

Excluida a ordem dos elementos da base, já consideramos todas as possíveis bases de $\mathbb{W}$ que podem se formar com os vetores $(1,2,1), (1,-1,2)$ e $(0,3,-1)$

(c) Primeiro escolheremos uma base $\{h_1,h_2,h_3\}$ ortogonal (vetores perpendiculares entre si) e depois normalizaremos a base (escolheremos vetores unitarios $w_i = h_i/|h_i|$, $i = 1,2,3$).

O primeiro vetor deve ser $h_1 = (1,2,1)$. O segundo vetor h_2 deve ser ortogonal a h_1 e estar no plano $\mathbb{W}$, isto é, deve ser ortogonal ao vetor normal do plano, $(5,-1,-3)$. Portanto, o vetor h_2 deve ser ortogonal aos vetores $(1,2,1)$ e $(5,-1,-3)$. Assim temos

$$h_2 = (1,2,1) \times (5,-1,-3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (-5,8,-11).$$

Por comodidade, “trocaremos o sinal“ do vetor h_2. Observe que $h_3 = (5,-1,-3)$. Desta forma obtemos uma base onde

$$\eta = \{h_1 = (1,2,1), h_2 = (5,-8,11), h_3 = (5,-1,-3)\}$$

como a pedida no problema, somente que os vetores ainda não são unitários. Portanto, somente falta normaliza a base η. Observe que

$$\begin{aligned}
|h_1| &= \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6} \\
|h_2| &= \sqrt{5^2+(-8)^2+11^2} = \sqrt{25+64+121} = \sqrt{210} \\
|h_3| &= \sqrt{5^2+(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}.
\end{aligned}$$

Normalizando

$$\beta = \left\{ w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,2,1),\ w_2 = \frac{1}{\sqrt{210}}\,(5,-8,11),\ w_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}\,(5,-1,-3) \right\}.$$

(d) Para que as coordenadas de $u = (4,3,1)$ na base α sejam $(u)_\alpha = (2,1,1)$ Devemos ter

$$(4,3,1) = \mathbf{2}\,(1,2,1) + \mathbf{1}\,(1,-1,2) + \mathbf{1}\,(a,b,c),$$

isto é

$$\begin{aligned}
4 &= 2+1+a, & a &= 1, \\
3 &= 4-1+b, & b &= 0, \\
1 &= 2+2+c, & c &= -3.
\end{aligned}$$

Logo

$$v_4 = (1,0,-3).$$

---

2) Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$.

$$u_1 = (1,1,2), \quad u_2 = (2,0,1)$$

e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T(v) = (v \cdot u_1)\,u_1 + (v \cdot u_2)\,u_2.$$

(a) Determine a matriz de T na base canônica.

(b) Determine o conjunto de vetores v tais que $T(v) = v$.

(c) Determine a equação cartesiana da imagem de T.

(d) Considere o plano

$$\mathbb{V}\colon x + y + 2\,z = 0.$$

Determine uma base do subespaço $T(\mathbb{V})$, a imagem do plano $\mathbb{V}$ pela transformação linear T.

Resposta:

(a) Devemos determinar $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$. Estes vetores serão as colunas da matriz de T na base canônica.

$$\begin{aligned} T(\mathbf{i}) \quad &= ((1,0,0)\cdot(1,1,2))\,(1,1,2) + ((1,0,0)\cdot(2,0,1))\,(2,0,1) = \\ &= 1\,(1,1,2) + 2\,(2,0,1) = (1,1,2) + (4,0,2) = (5,1,4); \\ \\ T(\mathbf{j}) \quad &= ((0,1,0)\cdot(1,1,2))\,(1,1,2) + ((0,1,0)\cdot(2,0,1))\,(2,0,1) = \\ &= 1\,(1,1,2) + 0\,(2,0,1) = (1,1,2); \\ \\ T(\mathbf{k}) \quad &= ((0,0,1)\cdot(1,1,2))\,(1,1,2) + ((0,0,1)\cdot(2,0,1))\,(2,0,1) = \\ &= 2\,(1,1,2) + 1\,(2,0,1) = (2,2,4) + (2,0,1) = (4,2,5). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T] = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Devemos encontrar vetores $v = (x, y, z)$ tais que

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Isto é, resolver o sistema de equações

$$5\,x + y + 4\,z = x, \quad x + y + 2\,z = y, \quad 4\,x + 2\,y + 5\,z = z.$$

Assim obtemos o sistema linear homogêneo

$$4\,x + y + 4\,z = 0, \quad x + 2\,z = 0, \quad 4\,x + 2\,y + 4\,z = 0.$$

Escalonando (considerando a terceira equação menos a primeira)

$$4\,x + y + 4\,z = 0, \quad x + 2\,z = 0, \quad y = 0.$$

Isto é,

$$x + z = 0, \quad x + 2\,z = 0, \quad y = 0.$$

Portanto,

$$x + z = 0, \quad z = 0, \quad y = 0.$$

Logo o sistema homogêneo admite somente a solução trivial. Portanto,

$$T(v) = v \quad \text{se, e somente se, } v = \bar{0}.$$

(c) A imagem de T é gerada pelos vetores

$$T(\mathbf{i}) = (5,1,4), \quad T(\mathbf{j}) = (1,1,2) \quad \text{e} \quad T(\mathbf{k}) = (4,2,5).$$

Os dois primeiros vetores geram o plano vetorial de vetor normal

$$(5,1,4) \times (1,1,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2,-6,4).$$

Obtemos o plano

$$x + 3\,y - 2\,z = 0.$$

Observe que o vetor $T(\mathbf{k}) = (4,2,5)$ pertence a este plano

$$4 + 6 - 10 = 0.$$

Logo a imagem é o plano

$$x + 3\,y - 2\,z = 0.$$

Obviamente, v. pode também proceder como segue. Observando primeiro que os vetores $(1,1,2)$ e $(2,0,1)$ estão na imagem de T. Por exemplo, se consideramos um vetor perpendicular a $(2,0,1)$, por exemplo $\mathbf{j}$, temos $T(\mathbf{j}) = (1,1,2)$. Para ver que $(2,0,1)$ também está na imagem considere um vetor perpendicular a $(1,1,2)$ (que não seja perpendicular a $(2,0,1)$), por exemplo $(0,-2,1)$. Temos que

$$\begin{aligned} T(0,-2,1) \quad &= ((0,-2,-1)\cdot(1,1,2))\,(1,1,2) + ((0,-2,1)\cdot(2,0,1))\,(2,0,1) = \\ &= (2,0,1). \end{aligned}$$

A seguir calculamos o plano vetorial gerado por estes vetores (obtendo plano $x + 3\,y - 2\,z = 0$). Finalmente, observamos que, por definição, a imagem $T(v)$ de qualquer vetor v é combinação linear de $(1, 1, 2)$ e $(2, 0, 1)$ e portanto está nesse plano.

(c) Para calcular a imagem do plano $\mathbb{V}\colon x+y+2\,z = 0$ escolhemos uma base do plano, por exemplo,

$$\beta = \{(1, -1, 0), (2, 0, -1)\},$$

e observamos que $T(\mathbb{V})$ está gerada pelas imagens destes dois vetores:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Estes dois vetores são parelelos a $(2, 0, 1)$. Assim a imagem $T(\mathbb{V})$ de $\mathbb{V}$ é a reta vetorial

$$(2\,t, 0, t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

---

3)

(a) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sejam $B = A^2$ e C a matriz inversa de B, (isto é $C = B^{-1}$). Suponha que

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Determine o coeficiente $c_{1,2}$ da matriz C.

Resposta: Utilizaremos o método de Gauss para o cálculo da matriz inversa.

Início:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Operações: (II-linha) $-$ (I-linha) e (III-linha) $-$ 2 (I-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Operações: $-$(II-linha) e $-$(III-linha) (trocas de sinal)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

Operações: (III-linha) -3 (II-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

Operações: 1/2 (III-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

Operações: (I-linha) $-$ 2 (II-linha)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix};$$

Operações: (I-linha) − (III-linha)

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

Portanto,

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

Observe que se $B = A^2$ então $B^{-1} = A^{-1}\, A^{-1} A^{-1}\, A^{-1}$:

$$A^2\,(A^{-1}\,A^{-1}) = A\,\underbrace{A\,A^{-1}}_{Id}\,A^{-1} = A\,Id\,A^{-1} = A\,A^{-1} = Id.$$

Portanto

$$C = \left(\begin{array}{ccc} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

Temos

$$c_{1,2} = ((-1/2)\,(1/2)) + ((1/2)\,(-1)) + ((1/2)\,(3/2)) = -1/4 - 1/2 + 3/4 = 0.$$