G2 de Álgebra Linear I – 2007.1

Gabarito

---

1) Considere o conjunto de vetores

$$W = \{(1,2,1); (1,5,2); (1,-1,0); (3,0,1); (0,3,1); (0,0,0)\}.$$

(a) Determine a equação cartesiana do sub-espaço vetorial $\mathbb{V}$ gerado pelos vetores do conjunto W.

(b) Determine uma base β de $\mathbb{V}$ formada por vetores do conjunto W

(c) Considere o vetor $v = (3,3,2)$. Determine as coordenadas $(v)_\beta$ do vetor $v = (3,3,2)$ na base β.

(d) Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a nova base de $\mathbb{R}^3$

$$\delta = \{u_1 + u_2 + u_3, u_1 + u_2, u_1\}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor w na base α são

$$(w)_\alpha = (1,1,1),$$

determine as coordenadas $(w)_\delta$ do vetor w na base δ.

Resposta:

(a) Os vetores $(1,2,1)$ e $(1,5,2)$ não são paralelos, portanto geram o plano (vetorial) cujo vetor normal é

$$(1,2,1) \times (1,5,2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (-1,-1,3).$$

Portanto, os vetores $(1,2,1)$ e $(1,5,2)$ geram o plano

$$x + y - 3\,z = 0.$$

Observe que os vetores $(1,-1,0)$, $(3,0,1)$, $(0,3,1)$ e $(0,0,0)$ verificam a equação do plano. Portanto, todos os vetores pertencem ao plano. Assim

$$\mathbb{V} = \{v = (x, y, z) \colon x + y - 3\,z = 0\}.$$

(b) Para determinar uma base β de $\mathbb{V}$ é suficiente escolher dois vetores de W linearmente independentes. Por exemplo, temos as seguintes bases de $\mathbb{V}$,

$$\beta_1 = \{(1,2,1);(1,5,2)\}, \quad \beta_2 = \{(1,2,1);(1,-1,0)\}, \quad \beta_3 = \{(1,2,1);(3,0,1)\}.$$

De fato, é suficiente escolher qualquer par de vetores de W diferentes de $\bar{0}$.

(c) Para determinar as coordenadas de $v = (3,3,2)$ na base β_1 escrevemos

$$(3,3,2) = x\,(1,2,1) + y\,(1,5,2)$$

obtendo

$$3 = x + y, \quad 3 = 2\,x + 5\,y, \quad 2 = x + 2\,y.$$

Considerando a diferença entre a última e a primeira equação temos $y = -1$ e $x = 4$. Logo

$$(v)_{\beta_1} = (4,-1).$$

Raciocinando de forma similar com as outras bases, obtemos

$$(v)_{\beta_2} = (2,1), \qquad (v)_{\beta_3} = (3/2, 1/2).$$

(d) Sejam (x,y,z) as coordenadas $(w)_\delta$ do vetor w na base δ. Então,

$$w = x\,(u_1 + u_2 + u_3) + y\,(u_1 + u_2) + z\,u_1 = (x + y + z)\,u_1 + (x + y)\,u_2 + x\,u_3.$$

Por outro lado, como $(w)_\alpha = (1,1,1)$, temos

$$w = u_1 + u_2 + u_3.$$

Como os vetores u_1, u_2, u_3 formam uma base, temos

$$x + y + z = 1, \quad x + y = 1, \quad x = 1.$$

Portanto, $x = 1, y = 0, z = 0$ e $(w)_\delta = (1,0,0)$.

2) Considere o plano

$$\pi \colon x - y + z = 0$$

e a transformação linear T que verifica

$$T(v) = 2\,v, \quad \text{para todo vetor } v \text{ de } \pi$$

e

$$T(1,1,1) = (1,1,0).$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine a equação cartesiana da imagem de T (denotada $\mathrm{im}(T)$). Lembre que

$$\mathrm{im}(T) = \{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(w) = u\}.$$

(c) Determine o conjunto de <u>todos</u> os vetores v de $\mathbb{R}^3$ que verificam

$$T(v) = (1, 0, -1).$$

(d) Determine se existe algum vetor v de $\mathbb{R}^3$ que verifique

$$T(v) = (1,1,1).$$

(e) Determine explicitamente a matriz na base canônica de uma transformação linear

$$S \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

cuja imagem seja o plano $x + 2y + z = 0$.

Resposta:

(a) Devemos determinar $T(\mathbf{i})$, $T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$. Como $T(1,1,1) = (1,1,0)$ e $T(1,1,0) = 2\,(1,1,0)$ (observe que $(1,1,0)$ pertence ao plano $x - y + z = 0$) temos

$$T(0,0,1) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = (1,1,0) - (2,2,0) = (-1,-1,0).$$

Analogamente, $T(0,1,1) = 2\,(0,1,1)$ (observe que $(0,1,1)$ pertence ao plano $x - y + z = 0$), assim temos

$$T(1,0,0) = T(1,1,1) - T(0,1,1) = (1,1,0) - (0,2,2) = (1,-1,-2).$$

Finalmente,

$$T(1,0,0) + T(0,1,0) = T(1,1,0) = (2,2,0), \quad T(0,1,0) = (2,2,0) - T(1,0,0).$$

Portanto,

$$T(0,1,0) = (2,2,0) - (1,-1,-2) = (1,3,2).$$

Portanto

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veja que $T(1,1,1) = (1,1,0)$ e que vetores v do plano verificam $T(v) = 2\,v$.

(b) A imagem de T é gerada pelos vetores $T(\mathbf{i}) = (1,-1,2)$, $T(\mathbf{j}) = (1,3,2)$, e $T(\mathbf{k}) = (-1,-1,0)$. Estes vetores estão no plano $x - y + z = 0$. Como dois deles são linearmente independentes, a imagem é exatamente o plano π.

(c) Devemos resolver o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$x + y - z = 1 \qquad -x + 3\,y - z = 0, \qquad -2\,x + 2\,y = -1.$$

Escalonando obtemos

$$x + y - z = 1 \qquad 4\,y - 2\,z = 1, \qquad 4\,y - 2\,z = 1.$$

Fazemos $y = t$, $z = -1/2 + 2\,t$. Finalmente,

$$x = 1 + z - y = 1 - 1/2 + 2\,t - t = 1/2 + t.$$

Logo

$$T(v) = (1,0,-1), \quad \text{se, e somente se,} \quad v = (1/2 + t, t, -1/2 + 2\,t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(d) A resposta é que não existe v tal que $T(v) = (1,1,1)$. Isto pode ser visto de duas formas. Primeiro observando que $(1,1,1)$ não pertence a imagem de T (o plano $x - y + z = 0$). Outro método é considerar o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$x + y - z = 1 \qquad -x + 3\,y - z = 1, \qquad -2\,x + 2\,y = 1.$$

Escalonando obtemos

$$x + y - z = 1 \qquad 4\,y - 2\,z = 2, \qquad 4\,y - 2\,z = 3.$$

Portanto, o sistema não tem solução, logo não existe nenhum vetor v tal que $T(v) = (1,1,1)$.

(e) A imagem de S é gerada pelos vetores $S(\mathbf{i})$, $S(\mathbf{j})$, e $S(\mathbf{k})$. Portanto estes vetores devem ser linearmente dependentes (pois se fossem linearmente independentes a imagem seria todo o $\mathbb{R}^3$) e devem gerar o plano $x+2\,y+z = 0$. Algumas possibilidades são:

$$[S] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[S] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

---

3)

(a) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Considere agora as matrizes

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \\[2ex] 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\[2ex] 0 & \dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Determine explicitamente uma matriz C tal que

$$C\,B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resposta:

(a) Determinaremos a inversa da matriz A pelo método de Gauss, **(k)** significa a k-ésima linha:

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2. **(ii)**-**(i)** e **(iii)**-**(i)**:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3. -**(ii)** e $-1/2$**(iii)**:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix};$$

4. **(ii)**$-$**(iii)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix};$$

5. **(i)**-2**(iii)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix};$$

6. **(i)**$-$**(ii)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Verifique que $A\,A^{-1} = Id$.

(b) Observe que

$$C\,B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$C \quad = C\,B\,B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{4} & 1 \\ -1+1 & \frac{1}{4}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{4}+\frac{9}{4} & \frac{1}{2}-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{10}{4}+ & -1 \end{pmatrix}.$$