G2 de Álgebra Linear I – 2006.2

Gabarito

---

1)

(a) Considere a base β de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1,2,1); (a,0,1); (0,b,c)\}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que as coordenadas do vetor $u = (3,4,3)$ na base β são

$$(u)_\beta = (1,1,1),$$

determine a, b e c.

(b) Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a nova base de $\mathbb{R}^3$

$$\delta = \{u_1 + u_3, u_1 + u_2, u_2 + u_3\}$$

Sabendo que as coordenadas do vetor w na base α são

$$(w)_\alpha = (1,1,1),$$

determine as coordenadas $(w)_\delta$ de w na base δ.

(c) Determine a equação cartesiana do sub-espaço vetorial $\mathbb{W}$ gerado pelos vetores

$$\{(1,2,1); (1,0,1); (1,6,1); (4,4,4); (5,5,5); (6,6,6)\}.$$

(d) Considere o plano ρ de equação cartesina

$$\rho\colon x - 2\,y + z = 0$$

e sua base

$$\gamma = \{(1, 0, -1); (1, 1, 1)\}.$$

Determine as coordenadas do vetor $\ell = (2, 3, 4)$ na base γ.

Resposta:

(a) Pela definição de coordenadas na base β,

$$(3, 4, 3) = 1\,(1, 2, 1) + 1\,(a, 0, 1) + 1\,(0, b, c).$$

Igualando as coordenadas obtemos o sistema de equações:

$$3 = 1 + a, \quad 4 = 2 + b, \quad 3 = 1 + 1 + c = 2 + c.$$

Portanto,

$$a = 2, \quad b = 2, \quad c = 1.$$

(b) Suponha que $(w)_\delta = (x, y, z)$, então, pela definição de coordenadas,

$$\begin{aligned} w &= x\,(u_1 + u_3) + y\,(u_1 + u_2) + z\,(u_2 + u_3) = \\ &= (x + y)\,u_1 + (y + z)\,u_2 + (x + z)\,u_3. \end{aligned}$$

Por outra parte, como $(w)_\alpha = (1, 1, 1)$ obtemos

$$w = u_1 + u_2 + u_3.$$

Assim,

$$(x + y)\,u_1 + (y + z)\,u_2 + (x + z)\,u_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

e pela unicidade das coordenadas em uma base,

$$x + y = 1, \quad y + z = 1, \quad x + z = 1.$$

Escalonando (terceira equação menos a primeira),

$$x + y = 1, \quad y + z = 1, \quad -y + z = 0.$$

Somando a segunda e a terceira equações,

$$2\,z = 1, \quad z = 1/2.$$

Portanto,

$$x = y = z = 1/2.$$

Assim

$$(w)_\delta = (1/2, 1/2, 1/2).$$

(c) Os vetores $(1,2,1)$ e $(1,0,1)$ não são paralelos. Portanto, eles geram um plano vetoria π cujo vetor normal é

$$(1,2,1) \times (1,0,1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,-1).$$

Portanto, a equação cartesiana de π é

$$\pi\colon x - z = 0.$$

É imediato verificar que os vetores $(1,6,1)$, $(4,4,4)$, $(5,5,5)$ e $(6,6,6)$ verificam a equação cartesiana e, portanto, estão em π:

$$1 - 1 = 4 - 4 - 5 - 5 = 6 - 6 = 0.$$

Logo, os vetores geram o plano $\pi\colon x - z = 0$.

(d) Considere $(\ell)_\gamma = (x, y)$, isto é

$$\ell = (2,3,4) = x\,(1,0,-1) + y\,(1,1,1).$$

Portanto,

$$2 = x + y, \quad 3 = y, \quad 4 = -x + y.$$

Assim, $y = 3$ e $x = -1$. Logo $(\ell)_\gamma = (-1, 3)$.

---

2) Considere os vetores $(1, 0, 2)$ e $(-2, 1, 1)$ e a transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(v) = (-2, 1, 1) \times \big(v \times (1, 0, 2)\big).$$

(a) Determine a matriz $[T]$ da transformação linear T na base canônica.

(b) Determine a equação cartesiana da imagem de T (denotada $\mathrm{im}(T)$). Lembre que

$\mathrm{im}(T) = \{u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que existe } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T(w) = u\}.$

(c) Determine explicitamente dois vetores não nulos e u e w de $\mathbb{R}^3$ tais que $u \neq w$ e verificam

$$T(u) = T(w) = (-2, 0, -4).$$

Resposta:

(a) Devemos determinar $T(\mathbf{i})$,$T(\mathbf{j})$ e $T(\mathbf{k})$.

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{i}) &= (-2, 1, 1) \times \big((1, 0, 0) \times (1, 0, 2)\big) = \\
&= (-2, 1, 1) \times \left(\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = \\
&= (-2, 1, 1) \times (0, -2, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2, 0, 4).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{j}) &= (-2,1,1)\times\big((0,1,0)\times(1,0,2)\big) = \\
&= (-2,1,1)\times\left(\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}\right) = \\
&= (-2,1,1)\times(2,0,-1) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix} = (-1,0,-2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{k}) &= (-2,1,1)\times\big((0,0,1)\times(1,0,2)\big) = \\
&= (-2,1,1)\times\left(\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}\right) = \\
&= (-2,1,1)\times(0,1,0) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = (-1,0,-2).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
[T] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & -2 & -2\end{pmatrix}.
$$

(b) A imagem de T está gerada pelas imagens dos vetores i, j e k, isto é, pelos vetores $T(\mathbf{i}) = (2,0,4)$ e $T(\mathbf{j}) = T(\mathbf{k}) = (-1,0,-2)$. Como estes vetores são paralelos, temos que a imagem é a reta

$$
\mathrm{im}(T) = \{(t,0,2\,t),\quad t\in\mathbb{R}\}.
$$

Uma equação cartesiana da imagem é

$$
y = 0,\quad 2\,x = z.
$$

Obviamente, existem infinitas escolhas.

(c) De fato, já sabemos que $T(-1,0,0) = (-2,0,4)$. Devemos resolver a equação

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Isto é

$$2\,x - y - z = -2, \qquad 4\,x - 2\,y - 2\,z = -4.$$

De fato, estas duas equações têm as mesmas soluções. Devemos escolher vetores $u = (x,y,z)$ cujas coordenas verificam a equação. Por exemplo, $u = (-1,0,0)$ e $w = (0,1,1)$.

---

(3)

a) Considere as retas

$$r_1 = (t, 0, 2\,t), \quad r_2 = (t,t,t), \quad r_3 = (t,t,0),$$

e as retas

$$s_1 = (0, 3\,t, 8\,t), \quad s_2 = (0, 3\,t, 6\,t), \quad s_3 = (t, 2\,t, 3\,t).$$

Determine a matriz de uma transformação linear

$$T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que verifica, simultaneamente,

$$T(r_1) = s_1, \quad T(r_2) = s_2, \quad \text{e} \quad T(r_3) = s_3.$$

b) Considere as retas (paralelas às consideradas anteriormente)

$$r_1' = (1+t, 1, 1+2\,t), \quad r_2' = (1+t, 1+t, 1+t), \quad r_3' = (1+t, 1+t, 1),$$

e as retas

$$s_1' = (0, 1+3\,t, 2+8\,t), \quad s_2' = (0, 1+3\,t, 2+6\,t), \quad s_3' = (t, 1+2\,t, 2+3\,t).$$

Determine a forma matricial de uma transformação afim

$$S \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que verifica, simultaneamente,

$$S(r_1') = s_1', \quad S(r_2') = s_2', \quad \text{e} \quad S(r_3') = s_3'.$$

Resposta:

(a) Observe que todas as retas consideradas, r_1, r_2, r_3 e s_1, s_2, s_3, contém a origem, portanto, a transformação linear T deve transformar um vetor diretor de r_i em um vetor diretor de s_i, $i = 1, 2, 3$. Portanto, podemos escolher

1. $T(1, 0, 2) = (0, 3, 8)$,
2. $T(1, 1, 1) = (0, 3, 6)$,
3. $T(1, 1, 0) = (1, 2, 3)$.

De (2) e (3) obtemos

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= T((1,1,1) - (1,1,0)) = T(1,1,1) - T(1,1,0) = \\ &= (0,3,6) - (1,2,3) = (-1,1,3). \end{aligned}$$

De (1) e da última equação obtemos

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (0,3,8) - 2\,T(0,0,1) = (0,3,8) - 2\,(-1,1,3) = \\ &= (2,1,2). \end{aligned}$$

Finalmente, de (3) e da última equação obtemos

$$\begin{aligned} T(0,1,0) &= (1,2,3) - T(1,0,0) = (1,2,3) - (2,1,2) = \\ &= (-1,1,1). \end{aligned}$$

Obtemos

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verifique que aplicando esta matriz aos vetores $(1,0,2)$, $(1,1,1)$ e $(1,1,0)$ obtemos os vetores $(0,3,8)$, $(0,3,6)$ e $(1,2,3)$, respectivamente.

(b) Como as retas consideradas são paralelas, temos

$$S(v) = T(v) + b,$$

onde b é uma translação. Veja que o ponto de interseção das retas r_i' (o ponto $(1,1,1)$) deve ser levado no ponto de interseção das retas s_i (o ponto $(0,1,2)$). Portanto, b é determinado pela relação

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} b_1 &= 0, & & \\ 3 + b_2 &= 1, & \qquad b_2 &= -2, \\ 6 + b_3 &= 2, & \qquad b_3 &= -4. \end{aligned}$$

Portanto a forma matricial é

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2. \\ -4 \end{pmatrix}$$

---

4) Determine a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta: Determinaremos a inversa pelo método de Gauss, **(k)** significa a k-ésima linha:

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2. **(ii)**-2 **(i)** e **(iii)**-3 **(i)**:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3. (-1/2) **(ii)**:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

4. **(iii)**+ 3 **(ii)**:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

5. (-1/2) **(iii)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

6. **(i)**-**(iii)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

7. **(i)**-2 **(ii)**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Verifique que o produto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$